UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Sobre la Geometría de los Productos Simétricos de la Recta Real

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

Mónica Andrea Reyes Quiroz

ASESORES:

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO,
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI.

TOLUCA, MÉXICO 2017

Introducción

La topología es una de las ramas más jóvenes de las matemáticas, dedicada, dicho de una manera informal, al estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes.

Dentro de la topología existe una línea de investigación dedicada a Teoría de los Hiperespacios, que tuvo sus inicios con los trabajos de F. Hausdorff y L. Vietoris y apareció en la década comprendida entre 1910 y 1920 aproximadamente. Cabe mencionar que en México se ha estado trabajando en esta área en los últimos 30 años y de manera particular en la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma del Estado de México en los últimos 20 años. Dentro de la Teoría de los Hiperespacios existen los llamados productos simétricos los cuales fueron introducidos en 1931 por los reconocidos matemáticos K. Borsuk y S. Ulam y desde entonces han sido estudiados desde diversas ópticas, por ejemplo se han estudiado propiedades topológicas como la conexidad local, arco-conexidad, aposindésis, propiedad del punto fijo, homogeneidad entre otras.

Dado un número natural n definamos el n-ésimo producto simétrico de un espacio topológico, $F_n(X)$, como el conjunto formado por todos los subconjuntos no vacíos de X con cardinalidad menor o igual que n, a este conjunto lo dotamos con la métrica de Hausdorff. Como ya mencionamos la noción de productos simétricos fue introducida por K. Borsuk y S. Ulam en 1931 en [4] y desde entonces ha sido estudiado por muchos autores principalmente en topología véase por ejemplo [1], [5], [6], [7] y [9]. Otro hiperespacio que ha sido ampliamente estudiado y tiene múltiples aplicaciones en análisis es el hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de un espacio X, denotado por 2^X. Al parecer la geometría de los productos simétricos no ha sido tan estudiada aunque parece más simple que la de 2^X. Más sin embargo, es de suma importancia debido a que, por ejemplo, los productos simétricos $F_n(X)$ constituyen una sucesión creciente de subconjuntos de 2^X, de tal manera que la unión de esta sucesión es densa en 2^X por lo que estudiar los productos simétricos ayuda a entender a 2^X. En [4] Borsuk y Ulam probaron que para

$n = 1, 2$ y 3, $F_n([0,1])$ es homeomorfo a $[0,1]^n$ y que para $n \geq 4$, $F_n([0,1])$ no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y hacen la pregunta natural:
Pregunta 1. ¿Para $n \geq 4$, $F_n(\mathbb{R})$ es homemorfo a algún subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$?

En el presente proyecto abordaremos los productos simétricos de la Recta Real donde analizaremos aspectos geométricos de este espacio, en particular estudiaremos las geodésicas, isometrías y sus encajes en espacios euclidianos. Para lo cual nos basaremos en las referencias [3] y [2].

En el primer capítulo se asentarán las bases de este trabajo, se definirá el n-ésimo producto simétrico de un espacio topológico X, $F_n(X)$, se dará una representación interesante para el caso de $F_3(\mathbb{R})$. Veremos la forma de medir distancias entre elementos de $F_3(\mathbb{R})$ con la métrica de Hausdorff y se definirán algunas operaciones y transformaciones inducidas de $\mathbb{R}$ en $F_3(\mathbb{R})$.

Daremos nombre a algunos conjuntos como lo son: rayos, líneas verticales y planos horizontales, los cuales nos darán una idea geométrica de como es la distancia entre puntos de $F_n(\mathbb{R})$ con la métrica de Hausdorff mediante el uso de algunos lemas como se muestra en el segundo capítulo.

En el tercer capítulo definiremos lo que es un encaje bi-Lipschitz, y veremos como los planos horizontales de $F_3(\mathbb{R})$ se pueden encajar en $\mathbb{R}^2$ y concluiremos este capítulo con el primer resultado importante de este trabajo, que nos dice que el espacio $F_3(\mathbb{R})$ se puede encajar en $\mathbb{R}^3$ mediante un encaje bi-Lipschitz.

Otro resultado importante es el que nos dice que todas las isometrías en $F_3(\mathbb{R})$ son inducidas de isometrías en $\mathbb{R}$, el cual se demuestra en el capítulo cuarto.

Y finalmente, en el último capítulo tenemos un resultado, en el cual se muestra bajo que condiciones se puede encajar $F_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^m$, para $m \geq n \geq 4$, dando así respuesta a la Pregunta 1.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Un hiperespacio de un espacio métrico X, es una colección de subconjuntos de X que satisfacen ciertas condiciones específicas. Los hiperespacios tuvieron sus inicios aproximadamente en 1900, con los trabajos de F. Hausdorff [8] y L. Viertoris [10]. Los primeros hiperespacios de un espacio métrico X que se considerarón fuerón el hiperespacio que consiste de todos los subconjuntos cerrados no vacíos de X, denotado por 2^X, y el hiperespacio que consiste de todos los subconjuntos compactos y conexos de X, denotado por $C(X)$. Mas adelante en 1931, dado un espacio topológico X y $n \in \mathbb{N}$, K. Borsuk y S. Ulam introducen el hiperespacio $F_n(X)$, al que llamarón el n-ésimo producto simétrico de X, y lo definen como $F_n(X) = \{A \subset X : A$ tiene a lo más n puntos$\}$.

1.1. Representación de $F_n(\mathbb{R})$

Vamos a considerar $F_n(\mathbb{R}) = \{A \subset \mathbb{R} : 1 \leq |A| \leq n\}$. Comenzaremos discutiendo en esta sección propiedades básicas de $F_n(\mathbb{R})$. La distancia Euclidiana en $\mathbb{R}^n$ será denotada como $| - |$.

Notemos que los elementos de $F_n(\mathbb{R})$ son conjuntos, es decir, dado $A \in F_n(\mathbb{R})$, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. En este trabajo a cada conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \in F_n(\mathbb{R})$ lo vamos a representar con la n-tupla ordenada $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $\infty < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < \infty$, y abusando de la notación diremos que $a_k \in A$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.
Así por ejemplo, $A = \{a, b\} \in F_4(\mathbb{R})$, se puede expresar como (a, a, b, b),

(a, a, a, b) y (a, b, b, b).
Si $A \in F_3(\mathbb{R})$ entonces solamente se puede expresar de dos maneras (a, a, b) y (a, b, b).
En general hay $\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$ maneras diferentes de expresar cada punto de cardinalidad $k \leq n$ como una n-tupla.
Veamos una representación geométrica en el caso $n = 3$.
A $F_3(\mathbb{R})$ le vamos a asociar el conjunto

$$\{(r, s, t) : r \leq s \leq t\}.$$

Así que vayamos viendo como es; primero ubiquemos el conjunto $\{(x, y, z) : x \leq y\}$. Véase Figura 1.1.

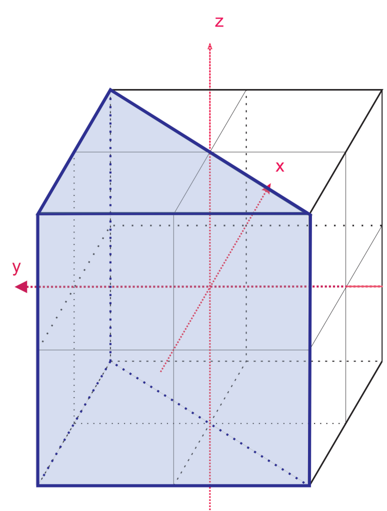

Figura 1.1: Puntos en $\mathbb{R}^3$ con la primera coordenada menor o igual que la segunda.

Luego el conjunto $\{(x, y, z) : y \leq z\}$ que podemos ver en la Figura 1.2, en color rojo:

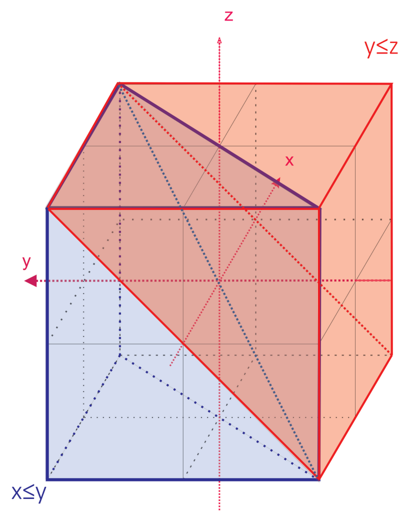

Figura 1.2: Puntos de $\mathbb{R}^3$ con la segunda coordenada menor o igual que la tercera.

Así, si nos fijamos en la intersección tendriamos el conjunto que queremos, el conjunto $\{(x, y, z) : x \leq y \leq z\}$. Como se muestra en la Figura 1.3.

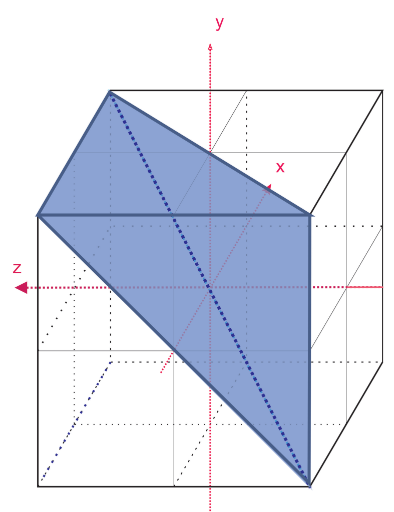

Figura 1.3: Casi modelo para $F_3(\mathbb{R})$

Que es el conjunto que le estaremos asociando a $F_3(\mathbb{R})$.
Sin embargo, hay que tener en cuenta que hay caras que se "identifican"; pues a los elementos de $F_3(\mathbb{R})$ de cardinalidad 2, se les puede asociar el punto (x, x, y) y también (x, y, y).
Así tendriamos que las caras de color rosa y azul de la Figura 1.4 son las que se "identifican", mientras que en la línea punteada azul se encuentran los elementos de la forma (x, x, x).

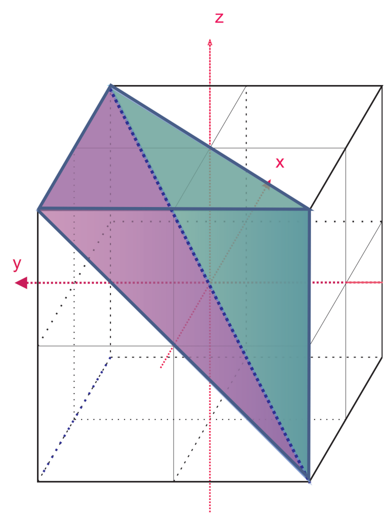

Figura 1.4: Modelo para $F_3(\mathbb{R})$, con caras que se "identifican"

1.2. Propiedades básicas de $F_n(\mathbb{R})$

Ahora vamos a discutir algunas propiedades basicas de $F_n(\mathbb{R})$, para $n \geq 3$.
Para $p, q \in \mathbb{R}$ denotaremos $p \wedge q = \text{mín}\{p, q\}$ y a $p \vee q = \text{máx}\{p, q\}$. En general si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son numeros reales se define $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_k = \text{mín}\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ y $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_k = \text{máx}\{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. A continuación algunas proposiciones.

Proposición 1.2.1. $p \vee (q \wedge p) = p$

Demostración:
Consideremos dos casos:

I) Si $p \leq q$, entonces $(q \wedge p) = p$ y así

$$p \vee (q \wedge p) = p \vee p = p.$$

II) Si $q \leq p$, entonces $(q \wedge p) = q$ y $(p \vee q) = p$, y así

$$p \vee (q \wedge p) = p \vee q = p.$$

Por tanto, en ambos casos tenemos que

$$p \vee (q \wedge p) = p.$$

†

Proposición 1.2.2. *$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) = q \wedge (p \vee r)$ pora toda $p, q, r \in \mathbb{R}$*

Demostración:
Consideremos los siguientes cuatro casos:
I) Si $q \leq p$ y $q \leq r$, entonces

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (q \wedge r) &= q \vee q \\ &= q \\ &= q \wedge (p \vee r).\end{aligned}$$

II) Si $p \leq q$ y $r \leq q$, entonces

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (q \wedge r) &= p \vee r \\ &= q \wedge (p \vee r).\end{aligned}$$

III) Si $p \leq q \leq r$, entonces

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (q \wedge r) &= p \vee q \\ &= q \\ &= q \wedge r \\ &= q \wedge (p \vee r).\end{aligned}$$

IV) Si $r \leq q \leq p$, entonces

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \vee (q \wedge r) &= q \vee r \\ &= q \\ &= q \wedge p \\ &= q \wedge (p \vee r).\end{aligned}$$

Por tanto $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) = q \wedge (p \vee r)$ pora toda $p, q, r \in \mathbb{R}$. †

Los puntos en $F_n(\mathbb{R})$ pueden ser vistos como subconjuntos de $\mathbb{R}$. Cuando nos referimos a la *cardinalidad* de $A \in F_n(\mathbb{R})$ nos referimos a la cardinalidad de A como subconjunto de $\mathbb{R}$, la cual será denotada por $card(A)$.
Por ejemplo en $F_3(\mathbb{R})$

- Si $A = (1,1,1)$, entonces $card(A) = 1$.
- Si $A = (1,2,2)$, entonces $card(A) = 2$.
- Si $A = (1,2,3)$, entonces $card(A) = 3$.

Por otro lado, si $s \in \mathbb{R}$ y $A \in F_n(\mathbb{R})$, vamos a definir la $dist(s,A) = min\{|s-r| : r \in A\}$.
En particular dado $s \in \mathbb{R}$ y $A \in F_3(\mathbb{R})$, una representación geométrica de $dist(s,A)$ se muestra en la Figura 1.5.

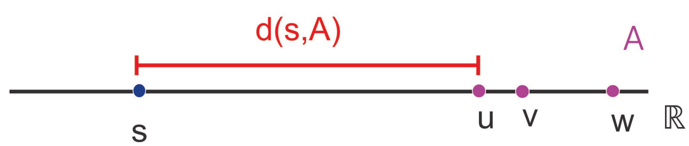

Figura 1.5: Distancia de un número real a un elemento de $F_3(\mathbb{R})$

En particular, con la métrica de Hausdorff la distancia entre A y B con $A, B \in F_n(\mathbb{R})$ puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &= \text{máx}\{\text{máx}_{s\in A} \text{mín}_{r\in B} |s-r|, \text{máx}_{r\in B} \text{mín}_{s\in A} |s-r|\} \\ &= \text{máx}_{s\in A}\, dist(s,B) \vee \text{máx}_{r\in B}\, dist(r,A). \end{aligned}$$

Como caso particular, si nos fijamos en dos puntos $A = (r,s,t)$ y $B = (u,v,w)$ en $F_3(\mathbb{R})$, como los que se muestran en la Figura 1.6, entonces

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &= dist(r,B) \vee dist(s,B) \vee dist(t,B) \vee \\ &\quad dist(u,A) \vee dist(v,A) \vee dist(w,A), \end{aligned}$$

es decir, el máximo de las distancias se muestra en la Figura 1.6 de color rosa.

Figura 1.6: Distancia de cada punto a otro conjunto

En este caso $d_H(A, B)$ se muestra en la Figura 1.7.

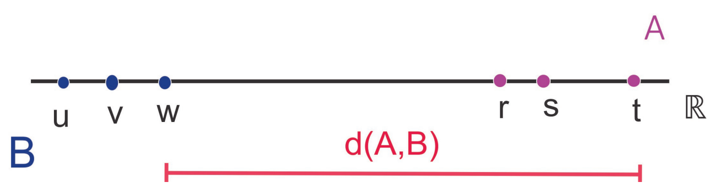

Figura 1.7: Distancia entre dos elementos de $F_3(\mathbb{R})$

El punto $0 \in \mathbb{R}$ pertenece a todo $F_n(\mathbb{R})$ y nos referiremos a él como el *orígen* y lo denotaremos por O.

Definición: Dado $A \in F_n(\mathbb{R})$ definimos la *norma de* A denotado por $|A|$ como $d_H(O, A)$.

Notemos que si $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ entonces $|A| = |a_0| \vee | a_n|$.
A una n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ también la vamos a denotar como $(a_i)_{i=1}^n$.

Para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, con $\mu \geq 0$ y $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in F_n(\mathbb{R})$, definimos:

$$\lambda + A = (\lambda + a_i)_{i=1}^n = (\lambda + a_1, \lambda + a_2, \ldots, \lambda + a_n),$$
$$\mu A = (\mu a_i)_{i=1}^n = (\mu a_1, \mu a_2, ..., \mu a_n)$$

y

$$\bar{A} = (-a_{n+1-i})_{i=1}^n = (-a_n, -a_{n-1}, \ldots, -a_2, -a_1)$$

El punto $\bar{A}$ es llamado el *conjugado* de A.
Por cada transformación lineal h en $\mathbb{R}$ hay una transformacion natural $\tilde{h}$ de $F_n(\mathbb{R})$ dada por

$$\tilde{h}((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = (h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_n))$$

si h preserva la orientación, es decir, si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ entonces $h(a_1) \leq h(a_2) \leq \cdots \leq h(a_n)$.
Y por
$$\tilde{h}((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = (h(a_n), h(a_{n-1}), \ldots, h(a_1))$$
si h invierte la orientación, es decir, si $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ entonces $h(a_n) \leq h(a_{n-1}) \leq \cdots \leq h(a_1)$.
En particular, las siguientes transformaciones de $\mathbb{R}$, denominadas:

$$\begin{array}{ll} \text{Traslaciones} & x \longrightarrow \lambda + x, \\ \text{Dilataciones} & x \longrightarrow \mu x, \mu \in (0, \infty), \\ \text{Reflexiones} & x \longrightarrow 2\lambda - x, \end{array}$$

inducen las correspondientes transformaciones en $F_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ll} \textit{Traslaciones verticales}: & T_\lambda(A) = \lambda + A, \\ \textit{Dilataciones}: & D_\mu(A) = \mu A, \\ \textit{Reflexiones}: & R_\lambda(A) = 2\lambda + \bar{A}. \end{array}$$

Veamos el efecto geométrico de estas transformaciones en $F_3(\mathbb{R})$.
Sean $A \in F_3(\mathbb{R})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ con $\mu > 0$.

1. *Traslación vertical*: $T_\lambda(A) = \lambda + A$
   Lo que hace esta transformación es recorrer λ-veces en cada una de sus coordenadas el punto A, como se ve en la Figura 1.8.

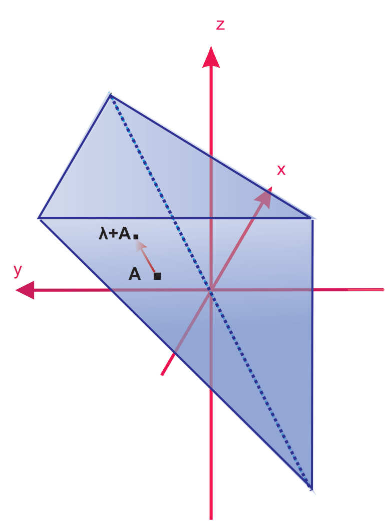

Figura 1.8: Taslación vertical de A

2. *Dilataciones*: $D_\mu(A) = \mu A$
   Esta transformación, lo que hace es mover el punto A, en la misma dirección de la recta que une el punto A con el orígen O, ya sea alargandolo o acortandolo. Como se ve en la Figura 1.9.

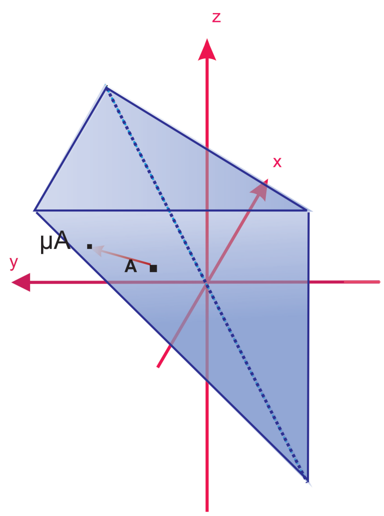

Figura 1.9: Dilatación de A

Proposición 1.2.3. *Las traslaciones verticales y las reflexiones en $F_n(\mathbb{R})$ son isometrías inducidas por isometrías en $\mathbb{R}$.*

Demostración:
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A, B \in F_n(\mathbb{R})$, donde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$; $T_\lambda(A) = (\lambda + a_1, \lambda + a_2, \ldots, \lambda + a_n)$ y $T_\lambda(B) = (\lambda + b_1, \lambda + b_2, \ldots, \lambda + b_n)$.
Notemos que $dist(a_k, B) = dist(\lambda + a_k, T_\lambda(B))$, para todo $a_k \in A$.
En efecto,

$$\begin{aligned} dist(\lambda{+}a_k, T_\lambda(B)) &= \min\{|(\lambda + a_k) - (\lambda + b_i)| : b_i \in B\} \\ &= \min\{|a_k - b_i| : b_i \in B\} \\ &= dist(a_k, B). \end{aligned}$$

Análogamente, $dist(A, b_k) = dist(T_\lambda(A), \lambda + b_k)$. Así,

$$\begin{aligned} d_H(T_\lambda(A), T_\lambda(B)) &= \text{máx}_{s\in T_\lambda(A)}\, dist(s, T_\lambda(B)) \vee \text{máx}_{r\in T_\lambda(B)}\, dist(T_\lambda(A), r) \\ &= \text{máx}_{a_i\in A}\, dist(\lambda + a_i, T_\lambda(B)) \vee \\ &\quad \text{máx}_{b_i\in B}\, dist(T_\lambda(A), \lambda + b_i) \\ &= \text{máx}_{a_i\in A}\, dist(a_i, B) \vee \text{máx}_{b_i\in B}\, dist(A, b_i) \\ &= d_H(A, B). \end{aligned}$$

Por tanto las traslaciones verticales son isometrías.
Ahora veamos que pasa con las reflexiones.
Para esto primero notemos que $dist(2\lambda - a_i, R_\lambda(B)) = dist(a_i, B)$, para todo $a_i \in A$ pues,

$$\begin{aligned} dist(2\lambda{-}a_i), R_\lambda(B)) &= \text{mín}\{|(2\lambda - a_i) - t| : t \in R_\lambda(B)\} \\ &= \text{mín}\{|(2\lambda - a_i) - (2\lambda - b_i)| : b_i \in B\} \\ &= \text{mín}\{|a_i - b_i| : b_i \in B\} \\ &= dist(a_i, B). \end{aligned}$$

Análogamente, $dist(R_\lambda(A), 2\lambda - b_i) = dist(A, b_i)$, para todo $b_i \in B$. Así,

$$\begin{aligned} d_H(R_\lambda(A), R_\lambda(B)) &= \text{máx}_{s\in R_\lambda(A)}\, dist(s, R_\lambda(B)) \vee \text{máx}_{r\in R_\lambda(b)}\, dist(R_\lambda(A), r) \\ &= \text{máx}_{a_i\in A}\, dist(2\lambda - a_i, R_\lambda(B)) \vee \\ &\quad \text{máx}_{b_i\in B}\, dist(R_\lambda(A), 2\lambda - b_i) \\ &= \text{máx}_{a_i\in A}\, dist(a_i, B) \vee \text{máx}_{b_i\in B}\, dist(A, b_i) \\ &= d_H(A, B). \end{aligned}$$

Por tanto las reflexiones son isometrías. †

Proposición 1.2.4. *Las dilataciones cumplen que $d_H(\mu A, \mu B) = \mu d_H(A, B)$ para cualesquiera $A, B \in F_n(\mathbb{R})$.*

Demostración:
Sean $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\mu > 0$ y $A, B \in F_n(\mathbb{R})$, donde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$;
$D_\mu(A) = (\mu a_1, \mu a_2, \ldots, \mu a_n)$ y $D_\mu(B) = (\mu b_1, \mu b_2, \ldots, \mu b_n)$.
Notemos que $dist(\mu a_i, D_\mu(B)) = \mu dist(a_i, B)$ para todo $a_i \in A$, pues tenemos que

$$\begin{aligned} dist(\mu a_i, D_\mu(B)) &= \text{mín}\{|\mu a_i - s| : s \in D\mu(B)\} \\ &= \text{mín}\{|\mu a_i - \mu b_i| : b_i \in B)\} \\ &= \text{mín}\{\mu|a_i - b_i| : b_i \in B\} \\ &= \mu dist(a_i, B). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} d_H(D_\mu(A), D_\mu(B)) &= \text{máx}_{s\in D_\mu(A)}\, dist(s, D_\mu(B)) \vee \text{máx}_{r\in D_\mu(B)}\, dist(r, D_\mu(A)) \\ &= \text{máx}_{a_i\in A}\, dist(\mu a_i, D_\mu(B)) \vee \text{máx}_{b_i\in B}\, dist(\mu b_i, D_\mu(A)) \\ &= \text{máx}_{a_i\in A}\, \mu dist(a_i, B) \vee \text{máx}_{b_i\in B}\, \mu dist(b_i, A) \\ &= \mu(\text{máx}_{a_i\in A}\, dist(a_i, B) \vee \text{máx}_{b_i\in B}\, dist(b_i, A)) \\ &= \mu d_H(A, B). \end{aligned}$$

†

Ahora, para cada $A \in F_n(\mathbb{R})$, definimos:

$$\Gamma(A) = \{T_\lambda(A) : \lambda \in \mathbb{R}\} \qquad \text{y}$$
$$\Delta(A) = \{D_\mu(A) : \mu \in (0, +\infty)\}.$$

También, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $\Pi_\lambda = T_\lambda(\Pi)$, donde

$$\Pi = \{(-r, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, r) \in F_n(\mathbb{R}) : r \in [0, +\infty), -r \le a_i \le r\}.$$

En $F_3(\mathbb{R})$ vamos a denotar como Π_0 al conjunto Π.
Nos vamos a referir a los conjuntos $\Gamma(A), \Delta(A)$ y Π_λ como *líneas verticales, rayos* y *planos horizontales*, respectivamente.

A continuación damos una visualización geométrica de estos conjuntos para el caso de $F_3(\mathbb{R})$.
Sea $A \in F_3(\mathbb{R})$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donde $\mu > 0$.

1. *Línea Vertical de A*: $\Gamma(A) = \{T_\lambda(A) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ esta representada por la imagen de la Figura 1.10.

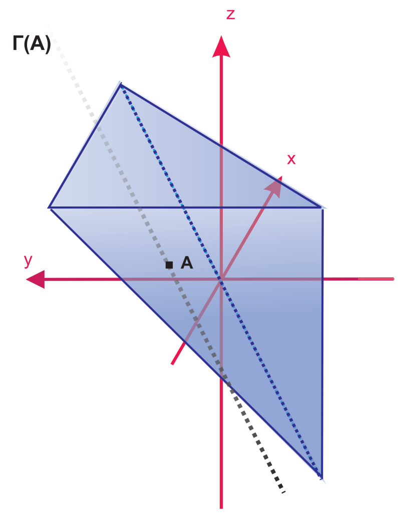

Figura 1.10: Línea Vertical de A

2. *Rayo de A*: $\Delta(A) = \{D_\mu(A) : \mu \in (0, +\infty)\}$ se muestra en la Figura 1.11.

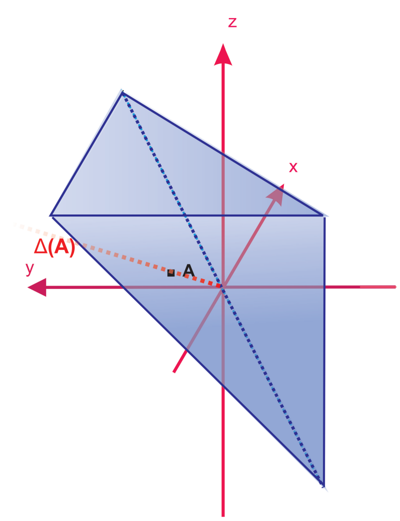

Figura 1.11: Rayo de A

3. *Planos horizontales* Π_0 y Π_λ, se muestran en la Figura 1.12

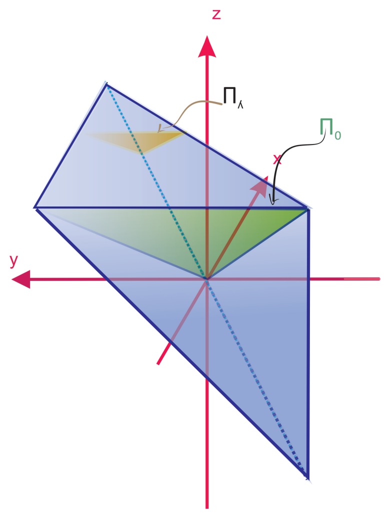

Figura 1.12: Planos Horizontales

Proposición 1.2.5. *Para cada $A, B \in F_n(\mathbb{R})$, los conjuntos $\Gamma(A)$ y $\Gamma(B)$ son disjuntos o el mismo conjunto, análogamente, los conjuntos $\Delta(A)$ y $\Delta(B)$, así como también los conjuntos Π_{λ_1} y Π_{λ_2} son disjuntos o el mismo, es decir,*

1. *Si $\Gamma(A) \cap \Gamma(B) \neq \phi$ entonces $\Gamma(A) = \Gamma(B)$,*
2. *Si $\Delta(A) \cap \Delta(B) \neq \phi$ entonces $\Delta(A) = \Delta(B)$ y*
3. *Si $\Pi_{\lambda_1} \cap \Pi_{\lambda_2} \neq \phi$ entonces $\Pi_{\lambda_1} = \Pi_{\lambda_2}$.*

Demostración:

1. Como $\Gamma(A) \cap \Gamma(B) \neq \phi$, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + A = \lambda_2 + B$. Para ver la contención $\Gamma(A) \subset \Gamma(B)$ tomemos $X \in \Gamma(A)$ entonces existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $X = \gamma + A$. Consideremos $\beta = \gamma - \lambda_1$, así

$$X = \gamma + A = \gamma - \lambda_1 + \lambda_1 + A = \beta + (\lambda_1 + A) = \beta + (\lambda_2 + B) = (\beta + \lambda_2) + B.$$

Por tanto $X \in \Gamma(B)$.
De manera análoga se prueba que $\Gamma(B) \subset \Gamma(A)$. Por lo tanto $\Gamma(A) = \Gamma(B)$.

2. Como $\Delta(A) \cap \Delta(B) \neq \phi$, existen $\mu_1, \mu_2 \in (0, \infty)$ tales que $\mu_1 A = \mu_2 B$. Sea $Y \in \Delta(A)$ entonces exite $\eta \in (0, \infty)$ tal que

$$Y = \eta A = \frac{\mu_1}{\mu_1}\eta A = \frac{\eta}{\mu_1}\mu_1 A = \frac{\eta}{\mu_1}\mu_2 B.$$

así $Y = \mu B$ con $\mu = \frac{\eta}{\mu_1}\mu_2 \in (0, \infty)$.
Por tanto $Y \in \Delta(B)$ y así $\Delta(A) \subset \Delta(B)$.
Análogamente se tiene que $\Delta(B) \subset \Delta(A)$ y así $\Delta(A) = \Delta(B)$.

3. Como $\Pi_{\lambda_1} \cap \Pi_{\lambda_2} \neq \phi$, existen $r_1, r_2 \in [0, +\infty)$, tales que $-r_1 \leq a_i \leq r_1$ y $-r_2 \leq b_i \leq r_2$ y además,

$$\lambda_1 + (-r_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, r_1) = \lambda_2 + (-r_2, b_2, \ldots, b_{n-1}, r_2).$$

De manera similar a la prueba de 1 y 2 se tiene que $\Pi_{\lambda_1} \subset \Pi_{\lambda_2}$ y $\Pi_{\lambda_2} \subset \Pi_{\lambda_1}$. Por tanto $\Pi_{\lambda_1} = \Pi_{\lambda_2}$.

†

Para concluir este capítulo notemos que

$$F_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{A \in F_n(\mathbb{R})} \Gamma(A),$$
$$F_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{A \in F_n(\mathbb{R})} \Delta(A) \text{ y}$$
$$F_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \Pi_\lambda.$$

Y para cada $\mu > 0$, definimos $\mathcal{S}_\mu = D_\mu(\mathcal{S})$ donde

$$\mathcal{S} = \{(-1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, 1) \in F_n(\mathbb{R}) : -1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1\}.$$

Capítulo 2

Distancias entre algunos conjuntos de $F_n(\mathbb{R})$

2.1. Algunos Lemas

Los siguientes cuatro lemas son directamente las generalizaciones correspondientes a los resultados para n=3 que se obtuvierón en [2]. Estos lemas nos dan una estimación de la distacia entre dos conjuntos del tipo Π_λ, $\Gamma(a)$ y $\Delta(a)$, respectivamente.

Lema 2.1.1. *Dado $A \in \Pi_{\lambda_1}$, tenemos que*

$$d_H(A, B) \geq |\lambda_1 - \lambda_2| \text{ para todo } B \in \Pi_{\lambda_2}.$$

La igualdad se da si también $B \in \Gamma(A)$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Sean $A = (\lambda_1 - r_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \lambda_1 + r_1)$ y $B = (\lambda_2 - r_2, b_2, \ldots, b_{n-1}, \lambda_2 + r_2)$.

- Si $r_2 \geq r_1$.
  Como $\lambda_1 - r_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq \lambda_1 + r_1$,
  entonces $-(\lambda_1 + r_1) \leq -a_{n-1} \leq \cdots \leq -a_2 \leq -(\lambda_1 - r_1)$
  y como $\lambda_1 \leq \lambda_2$ y $r_1 \leq r_2$, entonces
  $0 \leq (\lambda_2 + r_2) - (\lambda_1 + r_1) \leq (\lambda_2 + r_2) - a_{n-1} \leq \cdots \leq (\lambda_2 + r_2) - a_2 \leq (\lambda_2 + r_2) - (\lambda_1 - r_1)$.

Así,
$|(\lambda_2 + r_2) - (\lambda_1 + r_1)| \leq| (\lambda_2 + r_2) - a_{n-1}| \leq \cdots \leq |(\lambda_2 + r_2) - a_2| \leq |(\lambda_2 + r_2) - (\lambda_1 - r_1)|$.
Entonces,

$$\begin{aligned} dist(\lambda_2{+}r_2, A) &= \text{mín}\{|(\lambda_2 + r_2) - s| : s \in A\} \\ &= |(\lambda_2 + r_2) - (\lambda_1 + r_1)| \\ &= \lambda_2 + r_2 - \lambda_1 - r_1. \end{aligned}$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \text{máx}_{s\in A}\, dist(s, B) \vee \text{máx}_{r\in B}\, dist(r, A) \\ &\geq dist(\lambda_2 + r_2, A) \\ &= \lambda_2 + r_2 - \lambda_1 - r_1 \\ &\geq \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$

- Si $r_2 \leq r_1$, tenemos que $\lambda_1 - r_1 \leq \lambda_2 - r_2$
y dado que $\lambda_2 - r_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{n-1} \leq \lambda_2 + r_2$,
entonces $-(\lambda_2 + r_2) \leq -b_{n-1} \leq \cdots \leq -b_2 \leq -(\lambda_2 - r_2)$
y tenemos que
$(\lambda_1 - r_1) - (\lambda_2 + r_2) \leq (\lambda_1 - r_1) - b_{n-1} \leq \cdots \leq (\lambda_1 - r_1) - b_2 \leq (\lambda_1 - r_1) - (\lambda_2 - r_2) \leq 0$.
Así,
$|(\lambda_1 - r_1) - (\lambda_2 - r_2)| \leq |(\lambda_1 - r_1) - b_2| \leq \cdots \leq |(\lambda_1 - r_1) - b_{n-1}| \leq |(\lambda_1 - r_1) - (\lambda_2 + r_2)|$.
Entonces,

$$\begin{aligned} dist(\lambda_1{-}r_1, B) &= \text{mín}\{|(\lambda_1 - r_1) - r| : r \in B\} \\ &= |(\lambda_1 - r_1) - (\lambda_2 - r_2)| \\ &= \lambda_2 - r_2 - \lambda_1 + r_1. \end{aligned}$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \text{máx}_{s\in A}\, dist(s, B) \vee \text{máx}_{r\in B}\, dist(r, A) \\ &\geq dist(\lambda_1 - r_1, B) \\ &= \lambda_2 - r_2 - \lambda_1 + r_1 \\ &\geq \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$

Por tanto $d_H(A,B) \geq \lambda_2 - \lambda_1$.

Ahora si $B \in \Pi_{\lambda_2} \cap \Gamma(A)$, entonces $B = (\lambda + \lambda_1 - r_1, \lambda + a_2, \ldots, \lambda + a_{n-1}, \lambda + \lambda_1 + r_1)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$ por pertenecer a $\Gamma(A)$. Como también $B \in \Pi_{\lambda_2}$, $B = (\lambda_2 - r_2, b'_2, ..., b'_{n-1}, \lambda_2 + r_2)$ para algún $r_2 \in [0,\infty)$ y con $-r \leq b'_k \leq r$ para $k = 2, \ldots, n-1$. Así resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\lambda_2 - r_2 = \lambda + \lambda_1 - r_1,$$
$$\lambda_2 + r_2 = \lambda + \lambda_1 + r_1,$$
$$\lambda + a_k = b'_k.$$

Obtenemos que
$$B = (\lambda_2 - r_1, b'_2, \ldots, b'_{n-1}, \lambda_2 + r_1),$$
donde $b'_k = a_k + \lambda_2 - \lambda_1$ para cada $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Afirmación 2.1.2. *$dist(a_k, B) \vee dist(b_k, A) \leq \lambda_2 - \lambda_1$ para $k = 2, \ldots, n-1$.*

En efecto dado que
$$\begin{aligned} dist(a_k,B) &= \text{mín}\{|a_k - b_i| : b_i \in B\} \\ &= |a_k - (\lambda_2 - r_1)| \wedge \cdots \wedge |a_k - b'_k| \wedge \cdots \wedge |a_k - (\lambda_2 + r_1)| \\ &\leq |a_k - b'_k| \\ &= |a_k - (a_k + \lambda_2 - \lambda_1)| \\ &= \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$
Análogamente tenemos que

$$dist(b_k, A) \leq \lambda_2 - \lambda_1.$$

Así,
$$dist(a_k, B) \vee dist(b_k, a) \leq \lambda_2 - \lambda_1.$$

Afirmación 2.1.3. *$dist(\lambda_2 - r_1, A) \leq \lambda_2 - \lambda_1$.*

Dado que
$$\begin{aligned} dist(\lambda_2 - r_1, A) &= \text{mín}\{|\lambda_2 - r_1 - a_i| : a_i \in A\} \\ &= |(\lambda_2 - r_1) - (\lambda_1 - r_1)| \wedge \cdots \wedge |(\lambda_2 - r_1) - (\lambda_1 + r_1)| \\ &\leq |(\lambda_2 - r_1) - (\lambda_1 - r_1)| \\ &= \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$

Afirmación 2.1.4. $dist(\lambda_1 + r_1, B) \leq \lambda_2 - \lambda_1$.

En efecto pues,

$$\begin{aligned} dist(\lambda_1 + r_1, B) &= \min\{|\lambda_1 + r_1 - b_i| : b_i \in B\} \\ &= |(\lambda_1 + r_1) - (\lambda_2 - r_1)| \wedge \cdots \wedge |(\lambda_1 + r_1) - (\lambda_2 + r_1)| \\ &\leq |(\lambda_1 + r_1) - (\lambda_2 + r_1)| \\ &= \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned}$$

Análogamente tenemos las siguientes afirmaciones

Afirmación 2.1.5. $dist(\lambda_1 + r_1, B) \leq \lambda_2 - \lambda_1$.

Afirmación 2.1.6. $dist(\lambda_2 + r_1, A) \leq \lambda_2 - \lambda_1$.

Así por las Afirmaciones 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 tenemos que,

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max_{a_i \in A} dist(a_i, B) \vee \max_{b_i \in B} dist(b_i, A) \\ &= dist(\lambda_1 - r_1, B) \vee dist(a_k, B) \vee dist(\lambda_1 + r_1, B) \vee \\ &\quad\; dist(\lambda_2 - r_1, A) \vee dist(b_k, A) \vee dist(\lambda_2 + r_1, A) \text{ para} \\ &\quad\; k = 2, \ldots, n-1 \\ &\leq \lambda_2 - \lambda_1 \\ &= |\lambda_1 - \lambda_2|. \end{aligned}$$

Y como $B \in \Pi_{\lambda_2}$ tenemos que $d_H(A, B) \geq |\lambda_1 - \lambda_2|$.
Por tanto

$$d_H(A, B) = |\lambda_1 - \lambda_2|$$

para $B \in \Pi_{\lambda_2} \cap \Gamma(A)$. †

En la Figura 2.1, se muestran geométricamente las condiciones del Lema 2.1.1 para el caso de $F_3(\mathbb{R})$.

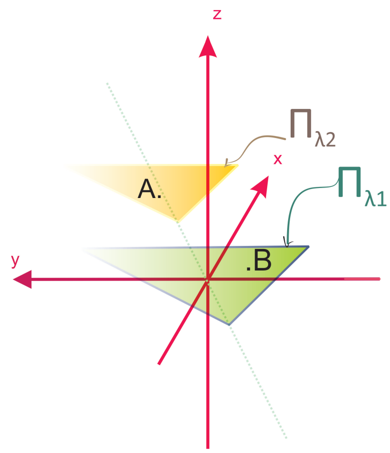

Figura 2.1: Distancia entre elementos de distintos planos horizontales.

Lema 2.1.7. *Sean $A = (-r, a_2, \ldots, a_{n-1}, r) \in \Pi$ y $B = (-s, b_2, \ldots, b_{n-1}, s) \in \Pi$. Entonces para todo $A' \in \Gamma(A)$ y $B' \in \Gamma(B)$, tenemos*

$$2d_H(A', B') \geq d_H(A, B).$$

Demostración:
Usando la transformación T_λ, si es necesario, supongamos que $A' = A$. Como $B' \in \Gamma(B)$ entonces $B' = T_\lambda(B)$ para alguna $\lambda \in \mathbb{R}$, por lo cual $B' \in \Pi_\lambda$, así por el Lema 2.1.1 $d_H(B', B) = |\lambda|$, y $d_H(A, B') \geq |\lambda|$. Por la desigualdad del triángulo

$$d_H(A, B) \leq d_H(A, B') + d_H(B', B) = d_H(A, B') + |\lambda| \leq 2d_H(A, B')$$

como se requería. †

Un representación geométrica en $F_3(\mathbb{R})$ del Lema anterior se da en la Figura 2.2.

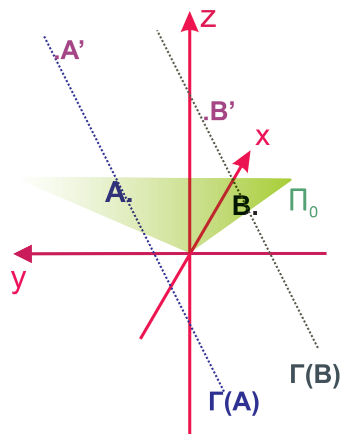

Figura 2.2: Otros puntos en $F_3(\mathbb{R})$

A continuación vamos a discutir en $F_3(\mathbb{R})$ algunas propiedades del conjunto

$$\Pi_0 = \{(-r, s, r) : 0 \leq r < \infty \text{ y } -r \leq s \leq r\}.$$

Para cada $r > 0$ vamos a definir el conjunto

$$\mathcal{C}(r) = \{A \in \Pi_0 : |A| = r\}.$$

Una imagen de $\mathcal{C}(r)$ se muestra en la Figura 2.3.

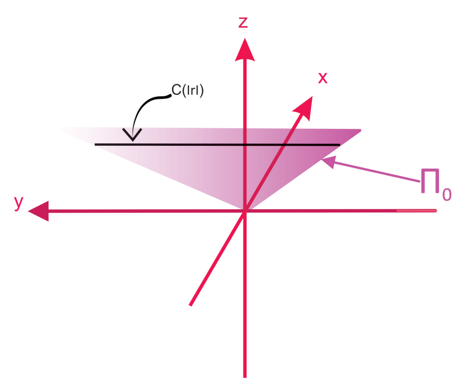

Figura 2.3: Otro conjunto en $F_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}(r)$.

Notemos que ambos conjuntos Π_0 y $\mathcal{C}(r)$ son invariantes bajo la transformación conjugación T, definida como

$$
\begin{aligned}
T : F_3(\mathbb{R}) &\to F_3(\mathbb{R}), \\
T(A) &= \bar{A}.
\end{aligned}
$$

Lema 2.1.8. *Dado* $A_1 = (-r_1, s_1, r_1) \in \mathcal{C}(r_1)$ *se tiene*

$$d_H(A_1, A_2) \geq |r_1 - r_2| \text{ para todo } A_2 = (-r_2, s_2, r_2) \in \mathcal{C}(r_2).$$

La igualdad se da si y sólo si $|s_1 - s_2| \leq| r_1 - r_2|$.

Demostración:
Sin pérdida de generalidad supongamos que $r_2 \geq r_1$. Tal situación se muestra en Figura 2.4.

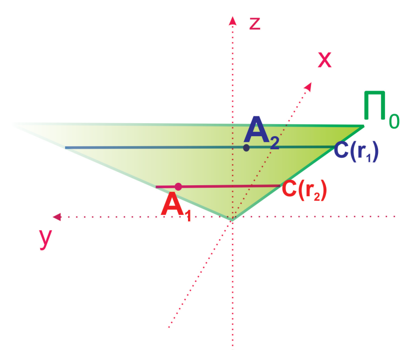

Figura 2.4: Los conjunto $\mathcal{C}(r_1)$ y $\mathcal{C}(r_2)$

Como tenemos que

$$
\begin{aligned}
dist(r_1, A_2) &= \text{mín}\{|r_1 - a| : a \in A\} \\
&= |r_1 - (-r_2)| \wedge| r_1 - s_2| \wedge| r_1 - r_2| \\
&\leq r_2 - r_1.
\end{aligned}
$$

Análogamente se puede mostrar que

$$
\begin{aligned}
dist(-r_1, A_2) &\leq r_2 - r_1, \\
dist(-r_2, A_1) &\leq r_2 - r_1, \\
dist(r_2, A_1) &\leq r_2 - r_1.
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que

$$
\begin{aligned}
d_H(A_1, A_2) &= dist(-r_1, A_2) \vee dist(s_1, A_2) \vee dist(r_1, A_2) \\
&\quad \vee dist(-r_2, A_1) \vee dist(s_2, A_1) \vee dist(r_2, A_1) \\
&= (r_2 - r_1) \vee dist(s_1, A_2) \vee dist(s_2, A_1).
\end{aligned}
$$

En particular, $d_H(A_1, A_2) \geq r_2 - r_1$.

Para la segunda parte notemos que a su vez también

$$\begin{aligned} dist(s_1, A_2) &= \text{mín}\{|s_1 - a_2| : a_2 \in A_2\} \\ &= |s_1 + r_2| \wedge | s_1 - s_2| \wedge | s_1 - r_2| \\ &\leq |s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

Análogamente $dist(s_2, A_1) \leq |s_1 - s_2|$.
Ahora, si $|s_1 - s_2| \leq | r_1 - r_2|$, entonces

$$d_H(A_1, A_2) \leq (r_2 - r_1) \vee |s_1 - s_2| = r_2 - r_1.$$

Así $d_H(A_1, A_2) = r_2 - r_1$.
Inversamente supongamos que $d_H(A_1, A_2) = r_2 - r_1$.
Usando las invariancia bajo la conjugación asumamos que $s_1 \geq 0$.
Por un lado tenemos que

$$dist(s_1, A_2) \leq d_H(A_1, A_2) = r_2 - r_1$$

y por otro lado como $0 \leq s_1 \leq r_1 \leq r_2$ entonces $s_1 - r_2 \leq s_1 + r_2$ y así

$$\begin{aligned} dist(s_1, A_2) &= |s_1 + r_2| \wedge | s_1 - s_2| \wedge | s_1 - r_2| \\ &= (s_1 + r_2) \wedge |s_1 - s_2| \wedge (r_2 - s_1) \\ &= |s_1 - s_2| \wedge (r_2 - s_1). \end{aligned}$$

Como $r_2 - r_1 \leq r_2 - s_1$ tenemos que $dist(s_1, A_2) = |s_1 - s_2|$.
Entonces

$$|s_1 - s_2| = dist(s_1, A_2) \leq r_2 - r_1.$$

Por tanto $|s_1 - s_2| \leq r_2 - r_1$. †

Un resultado mas general es el que se da en el siguiente lema.

Lema 2.1.9. *Dado $A = (-r, a_2, \ldots, a_{n-1}, r) \in \mathcal{S}_r$,tenemos que*

$$d_H(A, B) \geq |r - t| \text{ para todo } B = (-t, b_2, \ldots, b_{n-1}, t) \in \mathcal{S}_t.$$

La igualdad se da si $dist(a_k, B) \vee dist(b_k, A) \leq |r - t|$ para cada $k = 2, 3, \ldots, n - 1$.

Demostración:
Tenemos que para $k = 2, \ldots, n - 1$

$$
\begin{aligned}
d_H(A,B) = {} & dist(-r,B) \vee dist(r,B) \vee dist(a_k,B) \vee \\
& dist(b_k,A) \vee dist(-t,A) \vee dist(t,A).
\end{aligned}
$$

Para esto primero notemos que

$$dist(r,B) \vee dist(t,A) = |r-t|,$$

debido a que

$$
\begin{aligned}
dist(r,B) &= \text{mín}\{|r-b_i| : b_i \in B\} \\
&= |r+t| \wedge |\, r-b_k| \wedge |\, r-t| \text{ para } k = 2,\dots,n-1 \\
&= |r-b_k| \wedge |\, r-t|.
\end{aligned}
$$

Análogamente $dist(t,A) = |r-t| \wedge |\, t-a_k|$.

- Si $t \leq r$, como $0 \leq r, t$ y $b_k \leq t$ tenemos que $-t \leq -b_k$. Así

  $$|r-t| = r-t \leq r-b_k \leq |r-b_k|.$$

  Entonces

  $$dist(r,B) = |r-t| \text{ y } dist(t,A) = |r-t| \wedge |\, t-a_k|.$$

  Entonces por la Proposición 1.2.1 tenemos que

  $$dist(r,B) \vee dist(t,A) = |r-t|.$$

- Si $r \leq t$, análogamente al punto anterior

  $$dist(t,A) = |r-t| \text{ y } dist(r,B) = |r-t| \wedge |\, r-b_k|.$$

  Por la Proposición 1.2.1 se tiene que

  $$dist(r,B) \vee dist(t,A) = |r-t|.$$

Así

$$d_H(A,B) \geq dist(r,B) \vee dist(t,A) = |r-t|.$$

Para ver la segunda parte, si $dist(a_k, B) \vee dist(b_l, A) \leq |r - t|$ para cada k, entonces

$$d_H(A, B) \leq |r - t| \vee dist(r, B) \vee dist(t, A) = |r - t|,$$

es decir,

$$d_H(A, B) = |r - t|.$$

†

Lema 2.1.10. *Sean* $A = (-r, a_2, \ldots, a_{n-1}, r)$ *y* $B = (-s, b_2, \ldots, b_{n-1}, s)$ *puntos arbitrarios con* $s > 0$ *y* $r \leq s$. *Hagamos* $C = \frac{r}{s}B$. *Entonces*

$$d_H(A, C) \leq 2d_H(A, B).$$

Demostración:
Cuando B es multiplicado por el factor $\frac{r}{s}$, es decir, cuando hacemos $C = (-r, b_2\frac{r}{s}, \ldots, b_{n-1}\frac{r}{s}, r)$, ninguno de los puntos de B es removido mas que $s - r$. Es decir tenemos que

- $dist(b_i, C) \leq s - r$, para todo $b_i \in B$.
  Pues tenemos que

$$\begin{aligned} dist(-s, C) &= \text{mín}\{|-s - c_i| : c_i \in C\} \\ &= |-s + r| \wedge \cdots \wedge |-s - r| \\ &\leq |-s + r| \\ &= s - r. \end{aligned}$$

  Y para todo $k = 2, \ldots, n-1$ como $-s \leq b_k \leq s$, entonces $|b_k| \leq s$. Y así

$$\begin{aligned} dist(b_k, C) &= \text{mín}\{|b_k - c_i| : c_i \in C\} \\ &= |b_k + r| \wedge \cdots \wedge \left|b_k - b_k\frac{r}{s}\right| \wedge \cdots \wedge |b_k - r| \\ &\leq \left|b_k - b_k\frac{r}{s}\right| \\ &= |b_k| \left|(1 - \frac{r}{s})\right| \\ &\leq s(1 - \frac{r}{s}) \\ &= s - r. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} dist(s,C) &= \text{mín}\{|s-c_i| : c_i \in C\} \\ &= |s+r| \wedge \cdots \wedge |s-r| \\ &\leq |s-r| \\ &= s-r. \end{aligned}$$

Por tanto $dist(b_i, C) \leq s-r$, para todo $b_i \in B$.

- Análogamente $dist(c_i, B) \leq s-r$ para todo $c_i \in C$

Así obtenemos que

$$\begin{aligned} d_H(B,C) &= \text{mín}_{b_i\in B}\, dist(b_i,C) \vee \text{mín}_{c_i\in C}\, dist(c_i,B) \\ &\leq s-r. \end{aligned}$$

Por otro lado, dado el orden en la n-ésima tupla A tenemos que

$$-r \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq r,$$

así

$$-r \leq -a_{n-1} \leq \cdots \leq -a_2 \leq r,$$

y obtenemos que

$$s-r \leq s-a_{n-1} \leq \cdots \leq s-a_2 \leq s+r.$$

Como $0 \leq s-r$ entonces

$$|s-r| \leq |\, s-a_{n-1}| \leq \cdots \leq |s-a_2| \leq |s+r|.$$

Y por tanto

$$\begin{aligned} dist(s,A) &= \text{mín}\{|s-a_i| : a_i \in A\} \\ &= s-r. \end{aligned}$$

Luego como $dist(s,A) \leq d_H(A,B)$ y dado que $d_H(B,C) \leq s-r$ tenemos que

$$d_H(B,C) \leq d_H(A,B).$$

Entonces por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C) \leq 2d_H(A,B).$$

†

2.2. Un caso especial: distancia entre puntos de $F_3(\mathbb{R})$

En esta sección vamos a encontrar la fórmula para saber la distancia, $d_H(A, B)$, cuando $A = (-1, v, 1)$ y $B = (-1, u, 1)$.

Lema 2.2.1. *Si $A, B \in F_3(\mathbb{R})$ tienen la forma $A = (-1, v - 1)$ y $B = (-1, u, 1)$, entonces*

$$d_H(A,B) = \begin{cases} 1-u & \text{si } u \leq \frac{1}{3}, \quad -1 \leq v \leq 2u-1, \\ |u-v| & \text{si } u \leq \frac{1}{3}, \quad 2u-1 \leq v \leq 1, \\ 1-u & \text{si } u \geq \frac{1}{3}, \quad -1 \leq v \leq -u, \\ 1+v & \text{si } u \geq \frac{1}{3}, \quad -u \leq v \leq \frac{u-1}{2}, \\ |v-u| & \text{si } u \geq \frac{1}{3}, \quad \frac{u-1}{2} \leq v \leq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Demostración:
Para ver esto primero notemos que

$$\begin{aligned} d_H(A,B) = &\, dist(-1,B) \vee dist(v,B) \vee dist(1,B) \vee \\ &\, dist(-1,A) \vee dist(u,A) \vee dist(1,A). \end{aligned}$$

pero como

$$dist(1,A) = min\{|1-a_i| : a_i \in A\} = |1+1| \wedge |1-v| \wedge |1-1| = 0.$$

Y análogamente $dist(1, B) = dist(-1, A) = dist(-1, B) = 0$.
Tenemos entonces que

$$d_H(A,B) = dist(v,B) \vee dist(u,A),$$

es decir, solo basta en fijarnos en el valor de $dist(v, B)$ y $dist(u, A)$, y ver quien es el máximo.

También observemos que

$$dist(v,B) = \text{mín}\{|v-b_i| : b_i \in B\} = |v-(-1)| \wedge | v-u| \wedge | v-1|,$$

como $-1 \leq v \leq 1$ entonces

$$dist(v,B) = (1+v) \wedge (1-v) \wedge |v-u|.$$

Análogamente

$$dist(u,A) = (1+u) \wedge (1-u) \wedge |v-u|.$$

Ahora si veamos como se obtiene la fórmula (2.1)

1) $d_H(A,B) = 1-u \quad \text{si} \quad u \leq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad -1 \leq v \leq 2u-1.$

Para que v tenga sentido, entonces $0 \leq u$. Y así tendriamos que como $0 \leq u \leq \frac{1}{3}$, $-1 \leq v \leq 2u-1$ entonces

$$-1 \leq v \leq -\frac{1}{3}$$

y

$$\frac{1}{3} \leq -v \leq 1$$

Sumando 1 en ambas desigualdades se obtiene que

$$0 \leq 1+v \leq \frac{2}{3}$$

y

$$\frac{4}{3} \leq 1-v \leq 2.$$

Así tenemos que

$$1+v \leq 1-v. \tag{2.2}$$

Por otro lado, como $u \leq \frac{1}{3}$ y $v \leq -\frac{1}{3}$ entonces $v \leq -\frac{1}{3} \leq -u$ y así

$$1 + v \leq 1 - u. \tag{2.3}$$

Luego, como $v \leq 2u - 1$ se tiene que $v - u \leq u - 1$, por lo que

$$1 - u \leq u - v. \tag{2.4}$$

Dado que $0 \leq u$ obtenemos

$$1 - u \leq 1 + u. \tag{2.5}$$

Entonces, por (2.3) y (2.4) tenemos que

$$1 + v \leq u - v = |v - u|,$$

por esta desigualdad y por (2.2) concluimos que

$$1 + v = (1 + v) \wedge (1 - v) \wedge |v - u| = dist(v, B).$$

Por otro lado, por (2.5) y por (2.4) tenemos que

$$1 - u = (1 + u) \wedge (1 - u) \wedge |v - u| = dist(u, A).$$

Ahora, solo falta fijarnos en el máximo, que por (2.3) tenemos que es $1-u$
Por tanto,

$$d_H(A, B) = 1 - u.$$

2) $d_H(A, B) = |u - v| \quad$ si $\quad u \leq \frac{1}{3} \quad$ y $\quad 2u - 1 \leq v \leq 1.$

Para que v tenga sentido $0 \leq u$. Veamos la demostración por dos casos:

I) Si $u \geq v$.
Entonces $|u - v| = u - v$.
Como $2u - 1 \leq v$ entonces

$$u - v \leq 1 - u. \tag{2.6}$$

Dado que $u \geq v$ obtenemos

$$1 - u \leq 1 - v. \tag{2.7}$$

Pero $u \geq 0$ implica que

$$1 - u \leq 1 + u. \tag{2.8}$$

Así por (2.6) y (2.7) tenemos que $|u - v| = u - v \leq 1 - v$. Por tanto,

$$dist(v, B) = (1 + v) \wedge (u - v).$$

De (2.6) y (2.8) obtenemos que $|u - v| = u - v \leq 1 - u \leq 1 + u$. Por lo que

$$dist(u, A) = u - v.$$

Así,

$$d_H(A, B) = [(1 + v) \wedge (u - v)] \vee (u - v).$$

Pero por la Proposición 1.2.1 $[(1 + v) \wedge (u - v)] \vee (u - v) = (u - v)$. Por tanto

$$d_H(A, B) = u - v = |u - v|.$$

II) Si $u \leq v$.
Entonces $|u - v| = v - u$. Como $0 \leq v$ y $u \leq v$ entonces $0 \leq v$. Por lo que

$$1 - v \leq 1 + v. \tag{2.9}$$

Como $u \geq 0$ entonces

$$1 - u \leq 1 + u. \tag{2.10}$$

Luego, dado que $v \leq 1$, entonces

$$v - u \leq 1 - u. \tag{2.11}$$

Por (2.9) tenemos que

$$dist(v, B) = (v - u) \wedge (1 - v).$$

Luego, por (2.10) y (2.11) tenemos que

$$|v - u| = v - u \leq 1 - u \leq 1 + u.$$

Por tanto

$$dist(u, A) = v - u.$$

Teniendo así que

$$d_H(A,B) = [(v-u)\wedge(1-v)]\vee(v-u).$$

Y por la Proposición 1.2.1 tenemos que

$$[(v-u)\wedge(1-v)]\vee(v-u) = v-u = |u-v|.$$

Por tanto

$$d_H(A,B) = |u-v|.$$

3) $d_H(A,B) = 1-u \quad \text{si} \quad u \geq \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad -1 \leq v \leq -u.$

Como $u \geq \frac{1}{3}$ y $v \leq -u$ entonces

$$-1 \leq v \leq -\frac{1}{3}.$$

Así

$$1+v \leq 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \leq 2u.$$

Es decir, $1+v \leq 2-u$, y entonces

$$1-u \leq u-v. \tag{2.12}$$

Luego dado que $u \geq 0$

$$1-u \leq 1+u. \tag{2.13}$$

Así, por (2.12) y (2.13) tenemos que

$$dist(u,A) = (1-u)\wedge(1+u)\wedge(u-v) = 1-u. \tag{2.14}$$

Por otro lado, $v \leq -\frac{1}{3}$, implica que

$$1+v \leq 1-v. \tag{2.15}$$

Además como $-1 \leq v \leq -\frac{1}{3}$ entonces

$$\frac{1}{3} \leq -v.$$

Y $\frac{1}{3} \leq u$, implica que

$$\frac{2}{3} \leq u-v.$$

Dado que $v \leq -\frac{1}{3}$ entonces

$$1 + v \leq \frac{2}{3}.$$

Por tanto

$$1 + v \leq u - v. \tag{2.16}$$

Así, por la desigualdad anterior y (2.15)

$$dist(v, B) = (1 - v) \wedge (1 + v) \wedge (u - v) = 1 + v.$$

Esta igualdad y (2.14) implican que

$$d_H(A, B) = dist(u, A) \vee dist(v, B) = (1 - u) \vee (1 + v).$$

Pero por (2.16) tenemos que

$$d_H(A, B) = 1 - u.$$

4) $d_H(A, B) = 1 + v$ si $u \geq \frac{1}{3}$ y $-u \leq v \leq \frac{u-1}{2}$.
Como $u \geq 0$ entonces

$$1 - u \leq 1 + u. \tag{2.17}$$

Y $v \leq \frac{u-1}{2}$ implica que $2v \leq u - 1$, así

$$1 + v \leq u - v. \tag{2.18}$$

Pero como $1 - u \leq 1 + v$ ya que $-u \leq v$ entonces

$$1 - u \leq u - v = |u - v|. \tag{2.19}$$

Así por (2.17) y por (2.19) tenemos que

$$dist(u, A) = (1 - u) \wedge (1 + u) \wedge (u - v) = 1 - u. \tag{2.20}$$

Por otro lado, como $v \leq 0$ entonces

$$1 + v \leq 1 - v. \tag{2.21}$$

Así (2.18) y (2.21) implican que

$$dist(v, A) = (1 + v) \wedge (1 - v) \wedge (u - v) = 1 + v.$$

Como $d_H(A, B) = dist(u, B) \vee dist(v, A) = (1 - u) \vee (1 + v)$
Y dado que $1 - u \leq 1 + v$, concluimos que

$$d_H(A, B) = 1 + v.$$

5) $d_H(A,B) = |v-u|$ si $u \geq \frac{1}{3}$ y $\frac{u-1}{2} \leq v \leq 1$.

Como las hipótesis no nos dan mucha información sobre como es v respecto a u, entonces vamos a hacerlo por dos casos:

I) Si $v \leq u$.
Entonces $|v-u| = u-v$.
Como $u > 0$, se tiene que

$$1-u \leq 1+u.$$

Por tanto

$$dist(u,A) = (1-u) \wedge (1+u) \wedge (u-v) = (1-u) \wedge (u-v). \quad (2.22)$$

Por otro lado, dado que $\frac{u-1}{2} \leq v$, se tiene $u-1 \leq 2v$ y así

$$u-v \leq v-1.$$

Y como $u \leq 1$, entonces

$$u-v \leq 1-v.$$

Por las dos desigualdades anteriores tenemos que

$$dist(v,B) = (1-v) \wedge (1+v) \wedge (u-v) = u-v. \quad (2.23)$$

Se sigue de (2.22) y de (2.23) que

$$d_H(A,B) = [(1-u) \wedge (u-v)] \vee (u-v).$$

Por la Proposición 1.2.1 tenemos que

$$[(1-u) \wedge (u-v)] \vee (u-v) = (u-v).$$

Por tanto

$$d_H(A,B) = u-v.$$

II) Si $u \leq v$
Entonces $|v-u| = v-u$.

Como $v \leq 1$ entonces $v - u \leq 1 - u$, y dado que $1 - u \leq 1 + u$ entonces

$$v - u \leq 1 - u \leq 1 + u.$$

Así,

$$dist(u, A) = (1 - u) \wedge (1 + u) \wedge (v - u) = v - u. \tag{2.24}$$

Por otro lado, como $u \geq 0$ y $u \leq v$, implican que $v \geq 0$ y entonces

$$1 - v \leq 1 + v.$$

Por tanto

$$dist(v, B) = (1 - v) \wedge (1 + v) \wedge (v - u) = (1 - v) \wedge (v - u).$$

Así por igualdad anterior y (2.24) tenemos que

$$d_H(A, B) = (v - u) \vee [(1 - v) \wedge (v - u)].$$

Entonces por la Proposición 1.2.1

$$d_H(A, B) = v - u.$$

Con todo esto terminamos la prueba del Lema 2.2.1. †

Capítulo 3

Equivalencia bi-Lipschitz entre $F_3(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^3$

En esta sección definiremos lo que es un encaje bi-Lipschitz y probaremos que el espacio $F_3(\mathbb{R})$ es $(3+4\pi)-bi-Lipschitz$ equivalente a $\mathbb{R}^3$ y que cada conjunto Π_λ es $(1+4\pi)-bi-Lipschitz$ equivalente a $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.0.2. *Sean (X, d_X) y (Y, d_Y) espacios métricos. Una función $\phi : X \longrightarrow Y$ es un encaje, si este es un homeomorfismo sobre su imagen.*

Definición 3.0.3. *Un encaje $\phi : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ es $bi-Lipschitz$ si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\frac{1}{L} d_X(a,b) \leq d_Y(\phi(a), \phi(b)) \leq L d_X(a,b)$$

para cualesquiera $a, b \in X$, y en este caso diremos que X es L-bi-Lischitz equivalente a Y.

Ejemplo 3.0.4. *Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde*

$$f(x) = 3x.$$

Tenemos que

$$\frac{1}{L}|a-b| \leq |a-b| \leq L|a-b|,$$

con $L = 3$.

Teorema 3.0.5. *Sea $f : \Pi_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la función definida como*

$$f((-r,s,r)) = (rcos\frac{\pi s}{r}, rsen\frac{\pi s}{r}).$$

Entonces para toda $A, B \in \Pi_0$, tenemos que

$$\frac{2}{3}d_H(A,B) \leq |f(A) - f(B)| \leq (1+4\pi)d_H(A,B). \tag{3.1}$$

En particular, cada conjunto Π_λ es $(1+4\pi) - bi - Lipschitz$ equivalente a $\mathbb{R}^2$.

Demostración:
Notemos que,

$$f((-r,-r,r)) = (rcos(-\pi), rsen(\pi)) = (-r,0).$$

Por otro lado, $f((-r,r,r)) = (rcos\pi, rsen\pi) = (-r,0)$.
Por tanto la función f esta bien definida.
Dado que $\Pi_\lambda = T_\lambda(\Pi_0)$ y T_λ es una isometría, la segunda parte se sigue de la primera.
Para probar (3.1), sean $A, B \in \Pi_0$ puntos arbitrarios. Sin pérdida de generalidad supongamos que $|A| \geq |B|$.
Primero veamos algunas propiedades que tiene la función f. Sea $Z = (-r,s,r) \in \Pi_0$ un punto abitrario.

Afirmación 3.0.6. *Para todo $\mu > 0$, $f(\mu Z) = \mu f(Z)$.*

En efecto,

$$\begin{aligned} f(\mu Z) &= f((-\mu r, \mu s, \mu r)) \\ &= (\mu rcos(\tfrac{\pi \mu s}{\mu r}), \mu rsen(\tfrac{\pi \mu s}{\mu r})) \\ &= (\mu rcos(\tfrac{\pi s}{r}), \mu rsen(\tfrac{\pi s}{r})) \\ &= \mu(rcos(\tfrac{\pi s}{r}), rsen(\tfrac{\pi s}{r})) \\ &= \mu f(Z). \end{aligned}$$

Esta afirmación nos dice que los rayos bajo la función son mandados a líneas rectas como se ilustra en la Figura 3.1, (los rayos se indican de cierto color y su imagen aparece del mismo color).

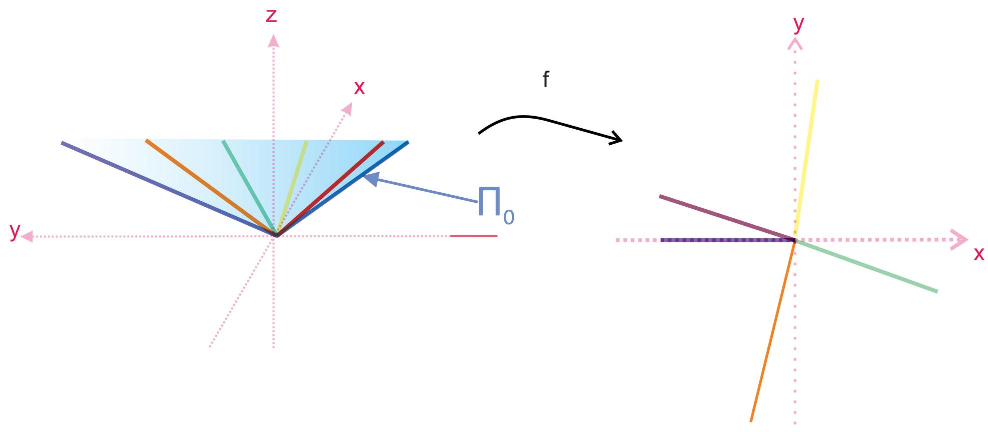

Figura 3.1: Comportamiento de f en los rayos de Π_0

Afirmación 3.0.7. $|Z| = \|f(Z)\|$.

En efecto, pues

$$\|f(Z)\| = \|(rcos\frac{\pi s}{r}, rsen\frac{\pi s}{r})\| = \sqrt{r^2cos^2\frac{\pi s}{r} + r^2sen^2\frac{\pi s}{r}} = r = |Z|.$$

Todos los puntos que tengan la misma norma que Z, es decir, que pertenezcan a $\mathcal{C}(|Z|)$, sus imagenes tendrán la misma norma, es decir, estarán sobre la misma circunferencia, como se muestra en la Figura 3.2 .

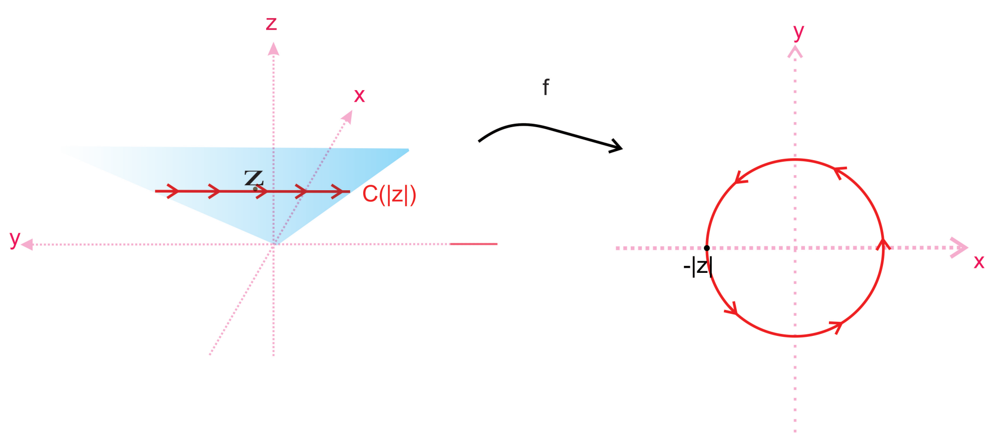

Figura 3.2: Comportamiento de f en el conjunto $\mathcal{C}(|Z|)$

Otras rectas de la forma $\mathcal{C}(k)$ sobre el plano horizontal Π_0 y sus imagenes estan respresentados en la Figura 3.3.

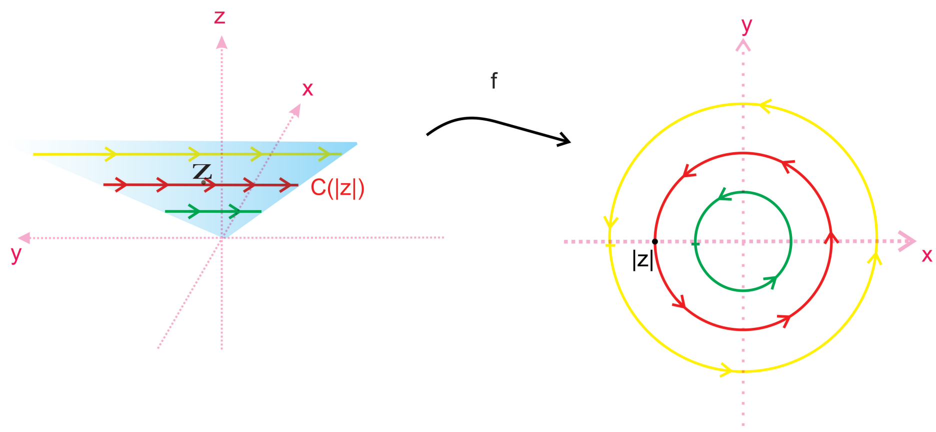

Figura 3.3: Comportamiento de f en otros conjuntos $\mathcal{C}(k)$

Entonces tenemos por la Afirmación 3.0.6 que para todo $A, B \in \Pi_0$ y $\mu \in [0, \infty)$

$$|f(\mu A) - f(\mu B)| = \mu |f(A) - f(B)|. \tag{3.2}$$

Luego, dado que $|A| \geq |B|$ entonces por la Afirmación 3.0.7 tenemos que $\|f(A)\| \geq \|f(B)\|$.

Afirmación 3.0.8. *Sea* $C = \Delta(A) \cap \mathcal{C}(|B|)$, *entonces* $\|f(A) - f(C)\| \leq \|f(A) - f(B)\|$.

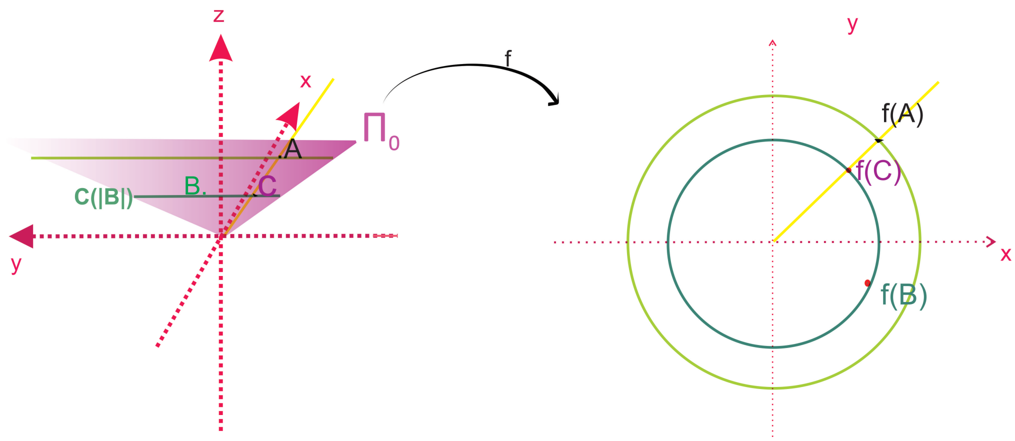

Figura 3.4: Comportamiento de f en A, B y C

Esto se ve claramente en la Figura 3.4, pero veamos analíticamente porque pasa, tenemos que

$$\|O - f(A)\| \leq \|O - f(B)\| + \|f(B) - f(A)\| = \|f(B)\| + \|f(B) - f(A)\|.$$

Como $f(A)$ y $f(C)$ estan sobre la recta que une a O con $f(A)$, tenemos que

$$\|O - f(A)\| = \|O - f(C)\| + \|f(A) - f(C)\| = \|f(C)\| + \|f(A) - f(C)\|.$$

Y dado que $\|f(C)\| = \|f(B)\|$, se tiene que

$$\|f(B)\| + \|f(A) - f(C)\| \leq \|f(B)\| + \|f(B) - f(A)\|.$$

Por tanto,

$$\|f(A) - f(C)\| \leq \|f(B) - f(A)\|.$$

Afirmación 3.0.9. $\|f(C) - f(B)\| \leq \|f(A) - f(B)\|$.

Esto también se puede ver fácilmente en la Figura 3.4, y es consecuencia del hecho de que en un trapecio la longitud de la diagonal es mayor o igual que la longitud de su base menor.

Ahora lo que vamos a hacer, es mostrar primero que

$$2d_H(C, B) \leq \|f(C) - f(B)\| \leq 2\pi d_H(C, B). \tag{3.3}$$

Para esto, usando la Proposición 1.2.4 y (3.2) podemos asumir que $|B| = 1$. Así como $C \in \mathcal{C}(|B)|$ entonces C y B tienen la forma $(-1, s, 1)$ y $(-1, t, 1)$ respectivamente, donde vamos a suponer que $s \leq t$, y además que $t \geq 0$.

Notemos que

$$\|f(B) - f(C)\| = 2sen(\frac{\pi(t-s)}{2})$$

pues,

$$\begin{aligned}
\|f(B) - f(C)\|^2 &= \|(\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t) - (\cos \pi s, \operatorname{sen} \pi s)\|^2 \\
&= \|(\cos \pi t - \cos \pi s, \operatorname{sen} \pi t - \operatorname{sen} \pi s)\|^2 \\
&= (\cos \pi t - \cos \pi s)^2 + (\operatorname{sen} \pi t - \operatorname{sen} \pi s)^2 \\
&= \cos^2 \pi t - 2 \cos \pi t \cos \pi s + \cos^2 \pi s + \\
&\quad \operatorname{sen}^2 \pi t - 2 \operatorname{sen} \pi t \operatorname{sen} \pi s + \operatorname{sen}^2 \pi s \\
&= -2 \cos \pi t \cos \pi s - 2 \operatorname{sen} \pi t \operatorname{sen} \pi s + 2 \\
&= 2(1 - (\cos \pi t \cos \pi s + \operatorname{sen} \pi t \operatorname{sen} \pi s)) \\
&= 2(1 - cos(\pi t - \pi s)).
\end{aligned}$$

Luego, utilizando la identidad trigonométrica $2 \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$. Tenemos que

$$\|f(B) - f(C)\|^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi(t-s)}{2}.$$

Por tanto

$$\|f(B) - f(C)\| = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-s)}{2}.$$

Ahora vamos a ocupar la siguiente desigualdad, que es válida para $\alpha \in [0, \pi]$.

$$\frac{\alpha}{\pi} \leq \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2}. \tag{3.4}$$

Caso 1 Si $t - s \leq 1$, usando (3.4) tenemos que

$$\frac{\pi(t-s)}{\pi} \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(t-s)}{2} \leq \frac{\pi(t-s)}{2},$$

es decir,

$$t - s \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(t-s)}{2} \leq \frac{\pi(t-s)}{2}.$$

Multiplicando por 2 tenemos

$$2(t-s) \leq 2 \operatorname{sen} \frac{\pi(t-s)}{2} \leq \pi(t-s).$$

Pero como $\|f(B)-f(C)\| = 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi(t-s)}{2}$, entonces

$$2(t-s) \leq \|f(B)-f(C)\| \leq \pi(t-s). \tag{3.5}$$

Como $s \leq t$, entonces tenemos que $|t-s| = t-s$, así

$$d_H(B,C) = [(1-s)\wedge(t-s)\wedge(1+s)] \vee [(1-t)\wedge(t-s)\wedge(1+t)].$$

Y dado que $t \leq 1$ tenemos que $t-s \leq 1-s$, y ademas como $0 \leq t$ entonces $1-t \leq 1+t$.
Con estas desigualdades tenemos que

$$d_H(B,C) = [(1+s)\wedge(t-s)] \vee [(1+t)\wedge(t-s)].$$

Y por la Proposición 1.2.2

$$d_H(B,C) = (t-s)\wedge[(1+s)\vee(1+t)].$$

Así $d_H(B,C) \leq t-s$.
Entonces por (3.5) se tiene que

$$2d_H(B,C) \leq 2(t-s) \leq \|f(B)-f(C)\|.$$

Por tanto

$$2d_H(B,C) \leq \|f(B)-f(C)\|.$$

Y así ya tenemos la primera parte de lo que queremos probar.
Ahora solo ver falta ver que $\|f(B)-f(C)\| \leq 2\pi d_H(A,B)$.

a) Si $t-s \leq \frac{2}{3}$.
Dado que $(1+s)+(t-s)+(1-t) = 2$, tenemos que $(t-s) \leq (1+s)\vee(1-t)$ y por tanto

$$d_H(B,C) = t-s.$$

Entonces,

$$\|f(B)-f(C)\| \leq \pi(t-s) = \pi d_H(B,C) \leq 2\pi d_H(B,C).$$

Y ya tenemos la segunda parte, pero solo, cuando $t-s \leq \frac{2}{3}$.

b) Ahora, supongamos que $t-s \geq \frac{2}{3}$.

- Si $t \leq \frac{1}{3}$.
  Entonces $-\frac{1}{3} \leq -t$ y $\frac{2}{3} \leq 1-t$. Por lo que $2 \leq 3(1-t)$. Lo que implica que

$$\|f(B) - f(C)\| = 2\operatorname{sen}\frac{\pi(t-s)}{2} \leq 2 \leq 3(1-t).$$

  Entonces por (2.1) tenemos que
  Si $s \in [-1, 2t-1]$, entonces $d_H(B,C) = 1-t$ y así

$$\|f(B) - f(C)\| \leq 3(1-t) \leq 3d_H(B,C).$$

  Si $s \in [2t-1, t]$, entonces $d_H(B,C) = t-s$, y así
  $\|f(B) - f(C)\| = 2 \leq 3(1-t)$, si $s \in [-1, 2t-1]$,
  $\|f(B) - f(C)\| = \pi(t-s) = \pi d_H(B,C)$, si $s \in [2t-1, t]$.

- Si $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$.
  Entonces tenemos que $-\frac{1}{2} \leq -t$, así $\frac{1}{2} \leq 1-t$ y por tanto

$$\|f(B) - f(C)\| = 2\operatorname{sen}\frac{\pi(t-s)}{2} \leq 2 \leq 4(1-t).$$

  Por otro lado, como $-t \leq s$ tenemos que $1-t \leq 1+s$ y junto con la desigualdad anterior obtenemos que

$$\|f(B) - f(C)\| \leq 2 \leq 3(1-t)2 \leq 4(1+s).$$

  Por tanto, usando (2.1) se tiene
  $\|f(B)-f(C)\| \leq 2 \leq 4(1-t) = 4d_H(B,C)$, si $s \in [-1, -t]$;
  $\|f(B)-f(C)\| \leq 2 \leq 4(1+s) = 4d_H(B,C)$, si $s \in [-t, \frac{t-1}{2}]$;
  $\|f(B) - f(C)\| \leq \pi(t-s) = \pi d_H(B,C)$ si $s \in [\frac{t-1}{2}, t]$.

- Si $t \geq \frac{1}{2}$.
  Como $t-s \leq 1$ y $\frac{1}{2} \leq t$ entonces $\frac{1}{2} \leq 1+s$ y así $2 \leq 4(1+s)$.
  Entonces
  $\|f(B) - f(C)\| \leq 2 \leq 4(1+s) = 4d_H(B,C)$ si
  $s \in [t-1, \frac{t-1}{2}]$,
  $\|f(B) - f(C)\| \leq \pi(t-s) = \pi d_H(B,C)$ si $s \in [\frac{t-1}{2}, t]$.

Por lo tanto

$$\|f(B) - f(C)\| \leq 2\pi d_H(B, C).$$

Caso 2 $t - s \geq 1$.
Como

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \frac{\pi(2-(t-s))}{2} &= \operatorname{sen}(\pi - \frac{\pi(t-s)}{2}) \\
&= \operatorname{sen} \pi \cos \frac{\pi(t-s)}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi(t-s)}{2} \cos \pi \\
&= sen \frac{\pi(t-s)}{2},
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\|f(B) - f(C)\| = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi(2-(t-s))}{2}.$$

Usando la desigualdad (3.4) tenemos que

$$\frac{\pi(2-(t-s))}{\pi} \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(2-(t-s))}{2} \leq \frac{\pi(2-(t-s))}{2},$$

$$2 - (t-s) \leq \operatorname{sen} \frac{\pi(2-(t-s))}{2} \leq \frac{\pi(2-(t-s))}{2}.$$

Así

$$2(2-(t-s)) \leq 2 \operatorname{sen} \frac{\pi(2-(t-s))}{2} \leq \pi(2-(t-s)).$$

Es decir,

$$(2-(t-s)) \leq \|f(B) - f(C)\| \leq \pi(2-(t-s)). \qquad (3.6)$$

Afirmación 3.0.10. $(1-t) \vee (1+s) \leq 2-(t-s) \leq 2[(1-t) \vee (1+s)]$.

Para la primera desigualdad observemos que como $-1 \leq s$ entonces $0 \leq 1 + s$. Y como $t \leq 1$ se tiene $0 \leq 1 - t$.
Dado que

$$(s+1) + (1-t) = 2 - (t-s),$$

tenemos que

$$(s+1) \leq (s+1) + (1-t) = 2 - (t-s),$$

y

$$(1-t) \leq (s+1) + (1-t) = 2 - (t-s).$$

Así

$$(1-t) \vee (1+s) \leq 2 - (t-s).$$

Ahora, para la segunda desigualdad tenemos que

- Si $1-t \leq 1+s$, entonces

  $$2 - (t-s) = (1-t) + (1+s) \leq 2(1+s) = 2[(1-t) \vee (1+s)].$$

- $1+s \leq 1-t$, entonces

  $$2 - (t-s) = (1-t) + (1+s) \leq 2(1-t) = 2[(1-t) \vee (1+s)].$$

Por tanto,

$$(1-t) \vee (1+s) \leq 2 - (t-s) \leq 2[(1-t) \vee (1+s)].$$

Recordemos que $d_H(B,C) = (t-s) \wedge [(s+1) \vee (1-t)]$.
Ahora, vamos a mostrar que

$$d_H(B,C) = (1-t) \vee (1+s).$$

- Si $t+s \leq 0$ y $t \leq \frac{1}{3}$, entonces $s \leq -t$ y así $1+s \leq 1-t$
  Como estamos en el caso en que $t-s \geq 1$, entonces

  $$s \leq t-1.$$

  Luego como $t-1 \leq 2t-1$ pues $t \geq 0$ tenemos

  $$t \leq \tfrac{1}{3} \qquad \text{y} \qquad -1 \leq s \leq 2t-1.$$

  Entonces por (2.1)

  $$d_H(B,C) = 1-t = (1-t) \vee (1+s).$$

- Si $s+t \leq 0$ y $t \geq \frac{1}{3}$, entonces $s \leq -t$ y por (2.1)

$$d_H(B,C) = 1-t = (1-t) \vee (1+s).$$

Por otro lado,

- Si $s+t \geq 0$, entonces $-t \leq s$ y así $1-t \leq 1+s$. Luego tenemos que $t \geq \frac{1}{3}$, pues de lo contrario, si $t < \frac{1}{3}$, como $-s \leq t$ entonces $s \leq \frac{1}{3}$ y así

$$t-s < \frac{2}{3} < 1.$$

lo cual contradice la hipótesis de que $t-s \geq 1$.
Asimismo $s \leq 0$, pues como $t-s \geq 1$ tenemos que $t \geq 1+s$ y como a su vez $t \leq 1$, $1+s \leq t \leq 1$ y por tanto $s \leq 0$.
Además, dado que $1 \leq t-s$ y $\frac{1}{3} \leq t \leq 1$ tenemos que $1+s \leq t \leq t-s$. Entonces $2s \leq t-1$. Por tanto,

$$-t \leq s \leq \frac{t-s}{2}.$$

Así, con lo anterior y por (2.1) tenemos que

$$d_H(B,C) = 1+s = (1-t) \vee (1+s).$$

Por tanto,

$$d_H(B,C) = (1-t) \vee (1+s).$$

Ahora con esto y por la Afirmación 3.0.10 tenemos que

$$d_H(B,C) \leq 2-(t-s) \leq 2d_H(B,C).$$

Luego por (3.6) tenemos que (3.3) se cumple, que es lo que queriamos probar primero.

Ya que tenemos eso, observemos que

$$\|f(A)-f(C)\| = d_H(A,C).$$

En efecto, sea A_0 con $|A_0| = 1$ de tal manera que $\Delta(A) = \Delta(A_0)$. Entonces $C = \mu_1 A_0$ y $A = \mu_2 A_0$ para algunas μ_1 y μ_2 con $\mu_1 \leq \mu_2$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\|f(A)-f(C)\| &= \|f(\mu_2 A_0)-f(\mu_1 A_0)\|\\ &= \|\mu_2 f(A_0)-\mu_1 f(A_0)\|\\ &= \|(\mu_2-\mu_1)f(A_0)\|\\ &= (\mu_2-\mu_1)\|f(A_0)\|\end{aligned}$$

y por la Afirmación 3.0.7 tenemos que

$$\|f(A)-f(C)\| = \mu_2-\mu_1$$

Por otro lado, notese que $d_H(A,C)\leq \mu_2-\mu_1$. Y dado que $A\in\Pi_{\mu_2}$ y $C\in\Pi_{\mu_1}$, por Lema 2.1.1 tenemos que $d_H(A,C)\geq \mu_2-\mu_1$.
Por tanto

$$d_H(A,C) = \mu_2-\mu_1 = \|f(A)-f(C)\|. \tag{3.7}$$

Luego, por la desigualdad del triángulo tenemos que

$$d_H(A,B)\leq d_H(A,C)+d_H(C,B).$$

La igualdad (3.7) y (3.3) implican

$$d_H(A,C)\leq \|f(A)-f(C)\|+\frac{1}{2}\|f(C)-f(B)\|.$$

Luego por la Afirmación 3.0.8 tenemos que

$$d_H(A,C)\leq \frac{3}{2}\|f(A)-f(B)\|. \tag{3.8}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\|f(A)-f(B)\|\leq \|f(A)-f(C)\|+\|f(C)-f(B)\|.$$

Luego la igualdad (3.7) y (3.3) implican

$$\|f(A)-f(B)\|\leq d_H(A,C)+2\pi d_H(B,C).$$

Y usando el Lema 2.1.10 tenemos que

$$\|f(A)-f(B)\|\leq d_H(A,B)+4\pi d_H(A,B) = (1+4\pi)d_H(A,B). \tag{3.9}$$

Por tanto, por las desigualdades (3.8) y (3.9)

$$\frac{2}{3}d_H(A,B)\leq \|f(A)-f(B)\|\leq (1+4\pi)d_H(A,B).$$

†

Teorema 3.0.11. *$F_3(\mathbb{R})$ es $(3+4\pi)-bi-Lipschitz$ equivalente a $\mathbb{R}^3$.*

Demostración:
Definamos la función $F : F_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$F((r,s,t)) = \left(\frac{r-t}{2}\cos\frac{2\pi(s-r)}{t-r}, \frac{r-t}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi(s-r)}{t-r}, \frac{t+r}{2}\right) \tag{3.10}$$

y mostraremos que F es el encaje bi-Lipschitz que se requiere.
Claramente F esta bien definida.
Notemos que los punto de la forma (r,r,r) con $r \in \mathbb{R}$, bajo la función serán mandados a puntos de la forma $(0,0,r)$, es decir,

$$F((r,r,r)) = (0,0,r).$$

Así también, para los puntos $(-r,s,r) \in \Pi_0$ tenemos que

$$F((-r,s-r)) = \left(r\cos\frac{\pi s}{r}, r\operatorname{sen}\frac{\pi s}{r}, 0\right).$$

Es decir, tenemos que la restricción de F a Π_0 es la función f definida en el Teorema 3.0.5 .
Ahora, sean $A, B \in F_3(\mathbb{R})$ puntos arbitrarios.
Como ya dijimos en la Proposición 1.2.3 las traslaciones son isometrías. Así que

$$d_H(\lambda + A, \lambda + B) = d_H(A,B). \tag{3.11}$$

Afirmación 3.0.12. *$F(\lambda+Z) = F(Z) + (0,0,\lambda)$ para todo $Z = (r,s,t) \in F_3(\mathbb{R})$.*

En efecto,

$$\begin{aligned}
F(\lambda+Z) &= F((\lambda+r, \lambda+s, \lambda+t)) \\
&= \Big(\tfrac{(\lambda+r)-(\lambda+t)}{2}\cos\tfrac{2\pi((\lambda+s)-(\lambda+r))}{(\lambda+t)-(\lambda+r)}, \\
&\quad \tfrac{(\lambda+r)-(\lambda+t)}{2}\operatorname{sen}\tfrac{2\pi((\lambda+s)-(\lambda+r))}{(\lambda+t)-(\lambda+r)}, \tfrac{(\lambda+t)+(\lambda+r)}{2}\Big) \\
&= \left(\tfrac{r-t}{2}\cos\tfrac{2\pi(s-r)}{t-r}, \tfrac{r-t}{2}\operatorname{sen}\tfrac{2\pi(s-r)}{t-r}, \lambda + \tfrac{t+r}{2}\right) \\
&= \left(\tfrac{r-t}{2}\cos\tfrac{2\pi(s-r)}{t-r}, \tfrac{r-t}{2}\operatorname{sen}\tfrac{2\pi(s-r)}{t-r}, \tfrac{t+r}{2}\right) + (0,0,\lambda) \\
&= F(Z) + (0,0,\lambda).
\end{aligned}$$

Como consecuencia de esta afirmación tenemos que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \|F(\lambda+A)-F(\lambda+B)\| &= \|F(A)+(0,0,\lambda)-(F(B)+(0,0,\lambda))\| \\ &= \|F(A)-F(B)\|. \end{aligned}$$

Así, por esto y (3.11) podemos asumir que $B \in \Pi_0$.
Ahora, sea $C = \Gamma(A) \cap \Pi_0$, entonces tenemos que $A, C \in \Gamma(A)$ y $B, C \in \Pi_0$.

Afirmación 3.0.13. $\|F(A)-F(B)\|^2 = \|F(A)-F(C)\|^2+\|F(C)-F(B)\|^2$.

Además tenemos que $\|F(A) - F(C)\| = d_H(A, C)$, dado que

$$\begin{aligned} \|F(A)-F(C)\| &= \|F(A) - F(A+\lambda)\|, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \|F(A) - F(A) - (0,0,\lambda)\|, \text{ por la Afirmación 3.0.12} \\ &= \|(0,0,\lambda)\| \\ &= |\lambda| \\ &= d_H(A,C) \text{ por el Lema 2.1.1.} \end{aligned}$$

Como $B, C \in \Pi_0$, entonces $F(B) = f(B)$ y $F(C) = f(C)$ y por (3.1) tenemos que

$$\frac{2}{3} d_H(B,C) \leq \|F(B) - F(C)\| \leq (1+4\pi) d_H(B,C). \tag{3.12}$$

Por otro lado, el Lema 2.1.7 implica que

$$d_H(B,C) \leq 2 d_H(A,B). \tag{3.13}$$

Y el Lema 2.1.1 que

$$d_H(A,C) \leq d_H(A,B). \tag{3.14}$$

Así por la desigualdad del triángulo, la desigualdad (3.12) y Afirmación 3.0.13 tenemos que

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &\leq d_H(A,C) + d_H(C,B) \\ &\leq \|F(A) - F(C)\| + \frac{3}{2}\|F(C) - F(B)\| \\ &\leq 2\|F(A) - F(B)\|. \end{aligned}$$

Y también por desigualdad del triángulo, (3.13) y (3.14) se tiene

$$\begin{aligned} \|F(A) - F(B)\| &\leq \|F(A) - F(C)\| + \|F(C) - F(B)\| \\ &\leq d_H(A,C) + (1+4\pi) d_H(C,B) \\ &\leq (3+4\pi) d_H(A,B). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2}d_H(A,B) \leq \|F(A) - F(B)\| \leq (3+4\pi)d_H(A,B).$$

Y por lo tanto F es K-bi-Lipschitz con $K \geq 3+4\pi$. Con lo cual completamos la demostración. †

Capítulo 4

Geometría de $F_n(\mathbb{R})$

Para comenzar esta sección vamos a discutir sobre geodésicas e isometrías en $F_n(\mathbb{R})$. Para eso vamos a dar las definiciones siguientes:

Definición 4.0.14. *Un arco abierto γ es un encaje $\gamma : (s,t) \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$, donde (s,t) es un intervalo abierto y $\gamma[(s,t)] \subset F_n(\mathbb{R})$.*

Vamos también a identificar a γ como $\gamma[(s,t)] \subset F_n(\mathbb{R})$.

Definición 4.0.15. *Un arco abierto $\gamma \subset F_n(\mathbb{R})$ es una geodésica si*

$$d_H(A,B) = d_H(A,C) + d_H(C,B)$$

para cada $A, C, B \in \gamma$ ordenados.

Observemos que tanto los rayos, como las líneas verticales pueden ser consideradas como un encaje isométrico de $(0,+\infty)$ y $\mathbb{R}$ en $F_n(\mathbb{R})$, respectivamente. Pues, si Δ es un rayo, entonces $\Delta = \Delta(A)$ para alguna A, con $|A| = 1$. Así $\Delta = h((0,+\infty))$, donde $h(\mu) = \mu A$, entonces tenemos que $d_H(h(\mu_1), h(\mu_2)) = |\mu_1 - \mu_2|$. Similarmente, si $\Gamma(A)$ es una línea vertical, tenemos $\Gamma(A) = g(\mathbb{R})$, donde $g(\lambda) = \lambda + A$ y así $d_H(g(\lambda_1), g(\lambda_2)) = |\lambda_1 - \lambda_2|$. Con esto tenemos que tanto los rayos como las líneas verticales son geodésicas.
Nuestra prioridad es mostrar que

$$\Gamma(0) = \{T_\lambda(0) : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, \dots, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

tiene una propiedad que no comparte con otras líneas verticales. Esta propiedad tiene una gran importancia para probar un teorema sobre isometrías,

en $F_3(\mathbb{R})$ [[2] , Teorema 9, página 11].
Por simplicidad vamos a denotar a $\Gamma(O)$ por Γ_0.
Primero discutiremos un tipo de geodésica.
Sea $A' = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin \Gamma_0$ algún punto en $F_n(\mathbb{R})$ con $a_1 + a_n \geq 0$.
Sean $\gamma_1 = \Delta(A')$ y $\gamma_2 = \{(u, u, \ldots, u) : u \leq 0\}$.
Por lo anterior ya tenemos que tanto γ_1 como γ_2 son geodésicas. Pero ahora, más que eso, $\gamma_1 \cup \gamma_2$ es una geodésica. La Figura 4.1 nos muestra como es la unión de estas geodésicas para el caso de $F_3(\mathbb{R})$.

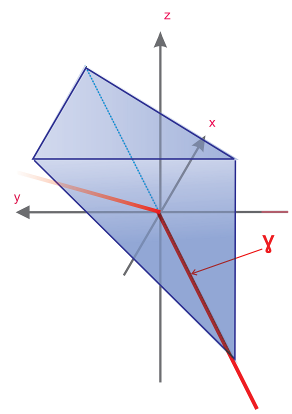

Figura 4.1: Geodésica en $F_3(\mathbb{R})$

Veámoslo en la siguiente Proposición.

Proposición 4.0.16. *Dadas dos geodesicas γ_1 y γ_2, definidas como antes, se tiene que $\gamma_1 \cup \gamma_2$ también es una geodésica.*

Demostración:
Dados dos puntos cualesquiera tenemos tres opciones:

1) Los dos puntos esten en γ_1, si es así entonces no hay nada que probar ya que γ_1 es una geodésica.

2) Los dos puntos esten en γ_2, tenemos un caso análogo a opción 1.

3) Sean $A \in \gamma_1$ y $B \in \gamma_2$. Para esto solo basta ver que

$$d_H(A, B) = d_H(A, O) + d_H(O, B).$$

Como $A \in \gamma_1$ entonces $A = \mu A'$, con $\mu > 0$.
Y como $B \in \gamma_2$ entonces $B = (u, u, \ldots, u)$ con $u \leq 0$.
Como $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$, y como $\mu > 0$, entonces

$$\mu a_1 \leq \mu a_2 \leq \cdots \leq \mu a_n,$$

y así

$$\mu a_1 - u \leq \mu a_2 - u \leq \cdots \leq \mu a_n - u.$$

Además como tenemos que $a_1 \leq a_n$ dado el orden en la n-tupla, y como $-a_1 \leq a_n$ pues $a_1 + a_n \geq 0$. Tenemos que

$$0 \leq a_n.$$

Como $\mu > 0$ y $u \leq 0$, entonces

$$0 \leq \mu a_n - u = |\mu a_n - u|.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \text{máx}_{\mu a_i \in A}\, dist(\mu a_i, B) \vee \text{máx}_{u \in B}\, dist(u, A) \\ &= \text{máx}_{\mu a_i \in A}\, |\mu a_i - u| \vee |\, \mu a_n - u| \\ &= \text{máx}_{\mu a_i \in A}\, |\mu a_i - u| \\ &= \mu a_n - u. \end{aligned}$$

Luego por otro lado

$$d_H(A, O) = \text{máx}\{|\mu a_i| : a_i \in A'\} = \mu a_n.$$

Y

$$d_H(O, B) = -u.$$

Por tanto

$$d_H(A, B) = d_H(A, O) + d_H(O, B).$$

†

Debido a la invarianza bajo traslaciones verticales T_λ, este tipo de geodésicas se pueden construir empezando con un punto arbitrario $C \in \Gamma_0$.
El siguiente lema nos muestra que todas las geodésicas que contienen un punto de Γ_0 son de este tipo.

Lema 4.0.17. *Sea γ una geodésica y sea C el punto en $\gamma \cap \Gamma_0$. Si hacemos $\gamma = \gamma_1 \cup \{C\} \cup \gamma_2$. Entonces $\gamma_1 \subset \Gamma_0$ o $\gamma_2 \subset \Gamma_0$.*

Demostración:
Obsérvese que el siguiente resultado que vamos a probar es más general que el Lema.
Sean $A, B \in F_n(\mathbb{R})$. Si exite un singular $C \in \Gamma_0$ tal que $d_H(A,B) = d_H(A,C) + d_H(A,B)$. Entonces $A \in \Gamma_0$ o $B \in \Gamma_0$.

No hay nada que probar si $C = A$ o $C = B$. Supongamos que $C \neq A$ y $C \neq B$.
Aplicandole una traslación vertical, si es necesario, asumamos que $C = O$.
Sean $A = (r, a_2, \ldots, a_{n-1}, t)$ y $B = (u, b_2, \ldots, b_{n-1}, w)$. Entonces

$$d_H(A,O) = |r| \vee |\, t| \text{ y } d_H(B,O) = |u| \vee |\, w|.$$

Usando una conjugación, si es necesario, supongamos que $|r| \vee |\, t| \vee |\, u| \leq w$.
De aquí notemos que $0 \leq w$.
Ahora procedamos por contradicción. Supongamos que $A \notin \Gamma_0$ y $B \notin \Gamma_0$, o equivalentemente, que $r \neq t$ y $u \neq w$.

Caso 1 $|r| < |t|$
Como $r \leq t$ dado el orden de la n-tupla y como dijimos que $r \neq t$ tenemos que

$$r < t.$$

Luego $t > 0$ pues si $t \leq 0$ entonces $r < 0$ y tendriamos que $|t| < |r|$, lo cual no puede ser.

Así

$$d_H(A,O) + d_H(O,B) = w + t.$$

Por otro lado notemos lo siguente

- $dist(w, A) < w + t$ pues

$$|w - r| \leq |w| + |r| < w + |t| = w + t.$$

Como para todo $i = 2, \ldots, n-1$, $r \leq a_i \leq t$ y $|r| \leq |t|$ tenemos que $|a_i| \leq t$. Así para todo $i = 2, \ldots, n-1$

$$|w - a_i| \leq |w| + |a_i| \leq |\, w| + |t| = w + t.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} dist(w, A) &= \min\{|w-r|, |w-a_i|, |w-t| : i = 2, \ldots, n-1\} \\ &< w+t. \end{aligned}$$

- $dist(u, A) < w + t$ pues

  $$|u - r| \leq | u| + |r| \leq w + |r| < w + t.$$

  Para todo $i = 2, \ldots, n-1$ se tiene que $|u - a_i| \leq | w| + |a_i| \leq w + t$. Además

  $$|u - t| \leq | u| + |t| \leq w + t.$$

  Por tanto

  $$\begin{aligned} dist(u, A) &= \min\{|u-r|, |u-a_i|, |u-t| : i = 2, \ldots, n-1\} \\ &< w+t. \end{aligned}$$

  Análogamente tenemos que

- $dist(b_i, A) < w + t$ para todo $i = 2, \ldots, n-1$,
- $dist(r, B) < w + t$,
- $dist(a_i, B) < w + t$ para todo $i = 2, \ldots, n-1$,
- $dist(t, B) < w + t$.

Con todo esto, tenemos que

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= dist(r, B) \vee dist(a_i, B) \vee dist(t, B) \vee \\ &\quad\; dist(u, A) \vee dist(b_i, A) \vee dist(w, A) \\ &< w - r. \end{aligned}$$

Y así,

$$d_H(A, B) < w + t = d_H(A, O) + d_H(O, B).$$

Lo que contradice la hipótesis.

Caso 2 $|r| \geq |t|$.
Dado que $r < t$, tenemos que $r < 0$. Entonces

$$d_H(A, O) + d_H(O, B) = w - r.$$

Notemos que análogamente al caso anterior tenemos que

- $dist(u, A) < w - r$,
- $dist(b_i, A) < w - r$ para todo $i = 2, \ldots, n-1$,
- $dist(w, A) < w - r$,
- $dist(r, B) < w - r$,
- $dist(a_i, B) < w - r$ para todo $i = 2, \ldots, n-1$,
- $dist(t, B) < w - r$.

Por tanto
$$d_H(A, B) < w - r.$$
Y así,
$$d_H(A, B) < w - r = d_H(A, O) + d_H(O, B).$$
Lo cual es una contradicción.

Por tanto $A \in \Gamma_0$ o $B \in \Gamma_0$. Y así se concluye la prueba del lema.

†

El Lema 4.0.17 nos dice que cada geodésica que contenga un singular, comparte un arco común con Γ_0. En particular, dado un singular C y tres geodésicas $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ que contengan a C, tenemos que al menos una de las intersecciones: $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \Gamma_0$, $\gamma_1 \cap \gamma_3 \cap \Gamma_0$ o $\gamma_2 \cap \gamma_3 \cap \Gamma_0$ contiene un arco abierto. En contraste, el siguiente lema nos muestra que cada k-tupla con $k > 1$ esta contenida en al menos $k + 2$ geodésicas que tengan solamente este punto en común.

Lema 4.0.18. *Dada $k \geq 2$, para cada k-tupla $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in F_n(\mathbb{R})$ existen $k + 2$ geodésicas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}$ tales que $\gamma_m \cap \gamma_l = \{A\}$ para cada $m \neq l$.*

Demostración:
Sea
$$\epsilon = \frac{1}{4}[(a_2 - a_1) \wedge (a_3 - a_2) \wedge \cdots \wedge (a_k - a_{k-1})].$$
Entonces para cada $m = 1, 2, \ldots, k$ definimos $\gamma_m : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ por
$$\gamma_m(x) = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m + x, a_{m+1}, \ldots, a_k).$$

Y también, definimos $\gamma_{k+1}(A) = \Gamma(A)$ y $\gamma_{k+2}(A) = \Delta(A)$, las cuales ya sabemos que son geodésicas.
Veamos que en efecto $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ son geodésicas.
Sean $A = (a_1, \ldots, a_k) \in F_n(\mathbb{R})$, $m \in \{1, \ldots, k\}$, B, C, $D \in \gamma_m$ puntos ordenados, entonces

$$\begin{aligned}B &= \gamma(x_1) = (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + x_1, \ldots, a_k),\\ C &= \gamma(x_2) = (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + x_2, \ldots, a_k),\\ D &= \gamma(x_3) = (a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m + x_3, \ldots, a_k),\end{aligned}$$

con $x_1, x_2, x_3 \in (-\epsilon, \epsilon)$ tales que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, pues tenemos que B, C y D estan ordenados.
Por definición tenemos que

$$\begin{aligned}d_H(B, D) &= dist(a_i, D) \vee dist(a_m + x_1, D) \vee dist(a_i, B) \vee dist(a_m + x_3, B)\\ &\quad \text{con } i = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, k.\end{aligned}$$

Como $a_i \in B \cap D$, entonces $dist(a_i, D) = 0 = dist(a_i, B)$, así

$$\begin{aligned}d_H(B, D) &= 0 \vee dist(a_m + x_1, D) \vee 0 \vee dist(a_m + x_3, B)\\ &= dist(a_m + x_1, D) \vee dist(a_m + x_3, B)\\ &= \text{mín}\{|a_m + x_1 - d_k : d_k \in D\} \vee \text{mín}\{a_m + x_3 - b_k : b_k \in B\}\\ &= \text{mín}\{a_m + x_1 - a_1, \ldots, a_m + x_1 - a_{m-1}, a_m + x_3 - (a_m + x_1),\\ &\quad a_{m+1} - (a_m + x_1), \ldots, a_k - (a_m + x_1)\} \vee \text{mín}\{a_m + x_3 - a_1,\\ &\quad \ldots, a_m + x_3 - a_{m-1}, a_m + x_3 - (a_m + x_1), a_{m+1} - (a_m + x_3),\\ &\quad \ldots, a_k - (a_m + x_3)\}\\ &= (x_3 - x_1) \vee (x_3 - x_1)\\ &= x_3 - x_1.\end{aligned}$$

Análogamente tenemos que $d_H(B, C) = x_2 - x_1$ y $d_H(C, D) = x_3 - x_2$. Por tanto

$$d_H(B, D) = d_H(B, C) + d_H(C, D).$$

Y así $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}$ son las geodésicas requeridas. †

Como caso particular para $n = 3$ tenemos que las geodésicas requeridas para $A = (r, s, t) \in F_3(\mathbb{R})$ son las siguientes cinco:
Sea $\epsilon = \frac{1}{4}[(s - r) \wedge (t - s)]$,

$$\begin{aligned}\gamma_1(A) &= \{(r + x, s, t) : x \in (-\epsilon, \epsilon)\},\\ \gamma_2(A) &= \{(r, s + x, t) : x \in (-\epsilon, \epsilon)\},\\ \gamma_3(A) &= \{(r, s, t + x) : x \in (-\epsilon, \epsilon)\},\\ \gamma_4(A) &= \Gamma(A),\\ \gamma_5(A) &= \Delta(A).\end{aligned}$$

Como vimos al principio, las transformaciones T_λ y R_λ son isometrías de $F_n(\mathbb{R})$. Estas isometrías son inducidas de las isometrías de $\mathbb{R}$. El siguiente teorema nos muestra que todas las isometrías en $F_3(\mathbb{R})$ son inducidas por isometrías en $\mathbb{R}$. Pero antes una observación.

Observación 4.0.19. *Sean $F : F_n(\mathbb{R}) \longrightarrow F_n(\mathbb{R})$ un isometría y γ una geodésica en $F_n(\mathbb{R})$, entonces $F(\gamma)$ también es una geodésica.*

Teorema 4.0.20. *Por cada isometría $F : F_3(\mathbb{R}) \longrightarrow F_3(\mathbb{R})$, existe una isometría $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(A) = (f(r), f(s), f(t))$ para cada $A = (r, s, t)$.*

Demostración:
Por Lema 4.0.17 y Lema 4.0.18 tenemos que

$$F(\Gamma_0) = \Gamma_0.$$

Supongamos que $F(O) = O$, si no es así aplicamos una traslación.
Como F es una isometría entonces tenemos que para cada $C \in \Gamma_0$,

$$|C| = d_H(O, C) = d_H(F(O), F(C)) = d_H(O, F(C)) = |F(C)|,$$

entonces

$$F(C) = C \qquad \text{o} \qquad F(C) = \overline{C}.$$

Usando la reflexión R_0 si es necesario, supongamos que $F(C) = C$ para todo $C \in \Gamma_0$.
Vamos a mostrar que F es la función identidad.

Sea $A = (r, s, t)$ con $r < t$, o sea que $card(A) = 2$ o $card(A) = 3$, y sea $F(A) = (r', s', t')$.

Elijamos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de tal manera que

$$\lambda_1 < r \wedge r' \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 > t \vee t'.$$

Hagamos $C_1 = (\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1)$ y $C_2 = (\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$. Entonces como $\lambda_1 \leq r$ y $r \leq s < t$ tenemos que

$$d_H(A, C_1) = |\lambda_1 - r| \vee |\lambda_1 - s| \vee |\lambda_1 - t| = t - \lambda_1.$$

Análogamente,

$$d_H(F(A), F(C_1)) = |\lambda_1 - r'| \vee |\lambda_1 - s'| \vee |\lambda_1 - t'| = t' - \lambda_1.$$

Y dado que F es una isometría y $F(C_1) = C_1$ se tiene que

$$t - \lambda_1 = d_H(C_1, A) = d_H(C_1, F(A)) = t' - \lambda_1,$$

es decir, $t' = t$.
Similarmente tenemos que

$$\lambda_2 - r = d_H(C_2, A) = d_H(C_2, F(A)) = \lambda_2 - r',$$

es decir, $r' = r$.

Entonces, hasta el momento tenemos que dado $A = (r, s, t)$ con $r < t$, la imagen de A bajo F es, $F(A) = (r, s', t)$.
Por tanto, tenemos que F preserva cada conjunto Π_λ, así como también los subconjuntos $\mathcal{C}(\rho) = \{A \in \Pi_\lambda : |A| = \rho\}$ de Π_λ para cada $\rho > 0$.

Afirmación 4.0.21. *Dado $B = (r, s, t) \in F_3(\mathbb{R})$ con $card(B) = 3$, tenemos que la geodésica $\gamma_2(B) = \{(r, s+x, t) : x \in (-\epsilon, \epsilon)\}$ con $\epsilon = [(s-r) \wedge (t-s)]/4$, contiene a B y se queda contenida en $\Pi_{(r+t)/2} \cap \mathcal{C}(|B|)$.*

Pues por una parte claramente $B \in \gamma_2$, y también se da que $\gamma_2 \subset \Pi_{(r+t)/2} \cap \mathcal{C}(|B|)$ ya que dado $\beta \in \gamma_2(B)$, $\beta = (r, s + a, t)$ para alguna $a \in (-\epsilon, \epsilon)$.
Como

$$r = \frac{r+t}{2} - \frac{t-r}{2},$$
$$t = \frac{r+t}{2} + \frac{t-r}{2}.$$

Además,

$$s + a = \frac{r+t}{2} + y \text{ con } y = s + a - \frac{r+t}{2}.$$

Dado que $a \in (-\epsilon, \epsilon)$, tenemos que $-\frac{s-r}{4} \leq a \leq \frac{t-s}{4}$, así

$$s + \left(-\frac{s-r}{4}\right) - \left(\frac{r+t}{2}\right) \leq y \leq s + \frac{t-s}{4} - \frac{r+t}{2},$$

$$s-(s-r)-\left(\frac{r+t}{2}\right)\leq y\leq s+(t-s)-\frac{r+t}{2},$$

$$-\frac{t-r}{2}\leq y\leq\frac{t-r}{2}.$$

Es decir, $\beta=\left(\frac{r+t}{2}-k,\frac{r+t}{2}+y,\frac{r+t}{2}+k\right)$ con $k=\frac{t-r}{2}\in[0,\infty)$ y $-k\leq y\leq k$. Así $\beta\in\Pi_{(r+t)/2}$.
Y por último notemos que $|\beta|=|r|\wedge|t|=|B|$, entonces $\beta\in\Pi_{(r+t)/2}\cap\mathcal{C}(|B|)$.
Por tanto $\gamma_2\subset\Pi_{(r+t)/2}\cap\mathcal{C}(|B|)$.

Afirmación 4.0.22. *No hay geodésicas que contengan al punto $A=\{r,t\}$ y esten contenidas en $\Pi_{(r+t)/2}\cap\mathcal{C}(|A|)$.*

Pues si γ es un arco tal que $A\in\gamma\subset\Pi_{\frac{r+t}{2}}\cap\mathcal{C}(|A|)$, entonces existe $\varepsilon>0$ lo suficientemente pequeño tal que los puntos:

$$\begin{aligned}A_1&=(r,t-\tfrac{\varepsilon}{2},t),\\ A_2&=(r,t-\tfrac{\varepsilon}{3},t),\\ A_3&=(r,r+\tfrac{\varepsilon}{2},t),\end{aligned}$$

esten contenidos en γ y satifagan que

$$\begin{aligned}d_H(A_1,A_2)&=dist(r,A_2)\vee dist(t-\tfrac{\varepsilon}{2},A_2)\vee dist(t,A_2)\vee dist(r,A_1)\vee\\ &\quad dist(t-\tfrac{\varepsilon}{3},A_1)\vee dist(t,A_1)\\ &=0\vee dist(t-\tfrac{\varepsilon}{2},A_2)\vee 0\vee 0\vee dist(t-\tfrac{\varepsilon}{3},A_1)\vee 0\\ &=dist(t-\tfrac{\varepsilon}{2},A_2)\vee dist(t-\tfrac{\varepsilon}{3},A_1)\\ &=|t-\tfrac{\varepsilon}{2}-t+\tfrac{\varepsilon}{3}|\wedge|\,t-\tfrac{\varepsilon}{2}-r|\\ &=|\tfrac{\varepsilon}{2}-\tfrac{\varepsilon}{3}|\\ &=\tfrac{\varepsilon}{6},\\ d_H(A_2,A_3)&=dist(t-\tfrac{\varepsilon}{3},A_3)\vee dist(r+\varepsilon,A_2)\\ &=\big(|t-\tfrac{\varepsilon}{3}-t|\wedge|\,t-\tfrac{\varepsilon}{3}-(r+\varepsilon)|\big)\vee\\ &\quad\big(|r+\varepsilon-r|\wedge|\,r+\varepsilon-(t-\tfrac{\varepsilon}{3})|\big)\\ &=|t-\tfrac{\varepsilon}{3}-(r+\varepsilon)|\vee\big(\varepsilon\vee\tfrac{\varepsilon}{3}\big)\\ &=\varepsilon,\\ d_H(A_1,A_3)&=dist(t-\tfrac{\varepsilon}{2},A_3)\vee dist(r+\varepsilon,A_3)\\ &=\big(|t-\tfrac{\varepsilon}{2}-t|\wedge|\,t-\tfrac{\varepsilon}{2}-(r+\varepsilon)|\big)\vee\big(|r+\varepsilon-(t-\tfrac{\varepsilon}{2})|\wedge\varepsilon\big)\\ &=|t-\tfrac{\varepsilon}{2}-(r+\varepsilon)|\vee\big(\varepsilon\vee\tfrac{\varepsilon}{2}\big)\\ &=\varepsilon.\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$d_H(A_1, A_3) \neq d_H(A_1, A_2) + d_H(A_2, A_3).$$

Por tanto γ no es una geodésica.
Ahora veamos que todos los puntos $A \in F_3(\mathbb{R})$ con $card(A) = 2$ son fijados por F. En efecto pues si $A = \{r, t\}$ va bajo F a un punto de tres elementos entonces por la Afirmación 4.0.21 hay una geodésica que contiene a $F(A)$. Y por otro lado, tenemos que F preserva tanto a $\Pi_{(r+t)/2}$ como a $\mathcal{C}(|A|)$ y además por la Observación 4.0.19 F manda geodésicas en geodésicas, esto contradice la Afirmación 4.0.22.

Finalmente nos queda mostrar que todos los puntos $A \in F_3(\mathbb{R})$ con $card(A) = 3$ son fijados por F.

Sea $A = (r, s, t)$. Entonces tenemos que $F(A) = (r, s', t)$ para alguna $s' \in [r, t]$.
Por el momento vamos a denotar al punto $(r, r, t) = (r, t, t) = \{r, t\}$.
Notemos que $F(\{r, t\}) = \{r, t\}$ y además que

$$\begin{aligned} d_H(\{r,t\},(r,s,t)) &= dist(r,(r,s,t)) \vee dist(t,(r,s,t)) \vee dist(r,\{r,t\}) \vee \\ &\quad dist(s,\{r,t\}) \vee dist(t,\{r,t\}) \\ &= 0 \vee 0 \vee 0 \vee dist(s,\{r,t\}) \vee 0 \vee 0 \\ &= dist(s,\{r,t\}) \\ &= (s-r) \wedge (t-s). \end{aligned}$$

Como $d_H(\{r, t\}, (r, s, t)) = d_H(F(\{r, t\}, F((r, s, t))) = d_H(\{r, t\}, (r, s', t))$.
Tenemos que

$$(s - r) \wedge (t - s) = (s' - r) \wedge (t - s').$$

Para saber la forma de s' tenemos varios casos:

- Si $s - r \leq t - s$ entonces $s - r = (s' - r) \wedge (t - s')$.
    - Si $s' - r \leq t - s$, entonces $s - r = s' - r$. Y tenemos que $s = s'$.
    - Si $t - s \leq s' - r$, entonces $s - r = t - s'$. Así $s' = t + r - s$.
- Si $t - s \leq s - r$, entonces $t - s = (s' - r) \wedge (t - s')$.
    - Si $s' - r \leq t - s'$, entonces $t - s = s' - r$. Y así $s' = t + r - s$.
    - Si $t - s' \leq s' - r$, entonces $t - s = t - s'$. Por tanto $s' = s$.

Así

$$s' = s \quad \text{o} \quad s' = r + t - s. \tag{4.1}$$

Dado que la isometría F deja el conjunto $\Pi_{(r+t)/2} \cap \mathcal{C}(|A|)$ invariante, en particular tenemos que

$$F((r,(r+t)/2,t)) = (r,(r+t)/2,t).$$

Debido a la continuidad de F es suficiente mostrar que $F((r,\tilde{s},t)) = (r,\tilde{s},t)$ para alguna $\tilde{s} \in (r,t)$ y $\tilde{s} \neq (r+t)/2$.
Sea $A_1 = \{r,\tilde{s},t\}$ con $\tilde{s} = \dfrac{5t+3r}{8}$.
Hagamos $A_2 = \{r,\tilde{s}',t\}$ donde $\tilde{s}' = r + t + -\tilde{s} = \dfrac{5r+3t}{8}$.
Entonces por (4.1) tenemos que

$$F(A_1) = A_1 \quad \text{o} \quad F(A_1) = A_2.$$

Luego, sea $B = \left(r, \dfrac{9r+7t}{16}, \dfrac{r+7t}{8}\right)$.
Como

$$\frac{9r+7t}{16} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{r+7t}{8}\right),$$

tenemos que

$$F(B) = B.$$

Luego, tenemos que

$$d_H(B,A_1) = dist\left(\frac{9r+7r}{16}, A_1\right) = \frac{5t+3r}{8} - \frac{9r+7t}{16} = \frac{3(t-r)}{16}.$$

Pues

$$r \leq \frac{9r+7t}{16} \leq \frac{5t+3r}{8} \leq \frac{r+7t}{8} \leq t.$$

Así,

$$\begin{aligned}
d_H(B, A_1) &= dist\left(\tfrac{5t+3r}{8}, B\right) \vee dist(t, B) \vee dist\left(\tfrac{9r+7t}{16}, A_1\right) \vee dist(\tfrac{r+7t}{8}, A_1) \\
&= \left[\left(\tfrac{r+7t}{8}\right) \wedge \left(\tfrac{5t-3r}{8} - \tfrac{9r+7t}{16}\right)\right] \vee \left[t - \tfrac{r+7t}{8}\right] \vee \\
&\quad \left[\left(\tfrac{9r+7t}{16} - r\right) \wedge \left(\tfrac{5t+3r}{8} - \tfrac{9r+7t}{16}\right)\right] \vee \\
&\quad \left[\left(t - \tfrac{r+7t}{8}\right) \wedge \left(\frac{r+7t}{8} - \tfrac{5t+3r}{8}\right)\right] \\
&= \left[\tfrac{1}{4}(t-r) \wedge \tfrac{3}{16}(t-r)\right] \vee \tfrac{1}{8}(t-r) \vee \\
&\quad \left[\tfrac{7}{16}(t-r) \wedge \tfrac{3}{16}(t-r)\right] \vee \left[\tfrac{1}{8}(t-r) \wedge \tfrac{1}{4}(t-r)\right] \\
&= \tfrac{3}{16}(t-r) \vee \tfrac{1}{8}(t-r) \vee \tfrac{3}{16}(t-r) \vee \tfrac{1}{8}(t-r) \\
&= \tfrac{3}{16}(t-r).
\end{aligned}$$

Análogamente tenemos que

$$d_H(B, A_2) = dist\left(\frac{r+7t}{8}, A_2\right) = t - \frac{r+7t}{8} = \frac{t-r}{8}.$$

Así tenemos que

$$d_H(B, A_1) \neq d_H(B, A_2).$$

Dado que F es una isometría y $F(B) = B$ tenemos que

$$d_H(F(B), F(A_1)) = d_H(B, A_1) \neq d_H(B, A_2).$$

Es decir, que

$$d_H(B, F(A_1)) \neq d_H(B, A_2).$$

Así

$$F(A_1) \neq A_2.$$

Por tanto

$$F(A_1) = A_1$$

como se queria probar.
Nótese que este proceso lo podemos hacer para un conjunto denso en el intervalo (r, t) y por continuidad, F es la identidad en todo el intervalo (r, t). Por tanto tenemos que F deja fijos a los elementos de $F_3(\mathbb{R})$ de cardinalidad uno, dos y tres. Por tanto F es la función identidad salvo reflexiones.

†

Capítulo 5

Encajes de $F_n(\mathbb{R})$ en espacios Euclidianos

La pregunta que motiva este trabajo es,
Pregunta 1. ¿Para $n \geq 4$, $F_n(\mathbb{R})$ es homemorfo a algún subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$?.
A continuación se presentan algunos resultados para la solución a esta pregunta, ultilizando encajes bi-Lipschitz.
$\mathbb{S}$ denotará la circunferencia unitaria en el plano complejo, mientras que $\mathbb{S}^n$ es la esfera de dimensión n en $\mathbb{R}^{n+1}$ y $F_n(\mathbb{S})$ el n-ésimo producto simétrico de $\mathbb{S}$.

Teorema 5.0.23. *Sea $n \geq 4$ y $m \geq n$. Supongamos que hay un encaje bi-Lipschitz de $F_{n-1}(\mathbb{S})$ en $\mathbb{S}^{m-1}$ en $\mathbb{R}^m$. Entonces existe un encaje bi-Lipschitz de $F_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Demostración:
La demostración de este teorema estará dividida en tres partes, la primera comienza con la siguiente afirmación

Afirmación 5.0.24. *El conjunto $\mathcal{S} = \{(-1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, 1) \in F_n(\mathbb{R}) : -1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1\}$ puede ser encajado en $F_{n-1}(\mathbb{S})$ por una función bi-Lipschitz.*

Para probar esta afirmación definamos la función $h : \mathcal{S} \to F_{n-1}(\mathbb{S})$ por

$$h((-1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, 1)) = \{-1, e^{i\pi a_2}, e^{i\pi a_3}, \ldots, e^{i\pi a_{n-1}}\}.$$

Sean $A, B \in \mathcal{S}$ puntos arbitrarios distintos. Sin pérdida de generalidad supongamos que
$d_H(A,B) = dist(s,B) = |s-t|$ para algún $s \in A$ y algún $t \in B$.
Notemos que $s \notin \{-1,1\}$, pues si $s=-1$ o $s=1$, entonces $dist(-1,B)=0$ o $dist(1,B)=0$, lo cual no puede ser pues $A \neq B$.
Entonces $dist(e^{i\pi s}, h(B)) = |e^{i\pi s} - e^{i\pi t}|$.
Notemos que $d_H(e^{i\pi}, h(B)) = |e^{i\pi s} - e^{i\pi t}| = 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi|s-t|}{2}$, pues

$$\begin{aligned} |e^{i\pi s}-e^{i\pi t}| &= |(\cos\pi s + i\operatorname{sen}\pi s)-(\cos\pi t + i\operatorname{sen}\pi t)| \\ &= |(\cos\pi s - \cos\pi t) + i(\operatorname{sen}\pi s - sen\pi t)|. \end{aligned}$$

Luego, por las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos x - cosy = -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{3}\right),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} |e^{i\pi s}-e^{i\pi t}| &= \left|-2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi(s+t)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi(s-t)}{2}\right) + 2i\cos\left(\tfrac{\pi(s+t)}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi(s-t)}{2}\right)\right| \\ &= \left|2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi(s-t)}{2}\right)\left[i\cos\left(\tfrac{\pi(s+t)}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi(s+t)}{2}\right)\right]\right| \\ &= \left|2\operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi(s-t)}{2}\right)\right| \\ &= 2\operatorname{sen}\tfrac{\pi|s-t|}{2}, \text{ pues } |s-t| \leq 2. \end{aligned}$$

Luego por la desigualdad (3.4) tenemos que

$$|e^{i\pi s} - e^{i\pi t}| = 2\operatorname{sen}\frac{\pi|s-t|}{2} \geq 2|s-t|.$$

Dado que $d_H(h(A), h(B)) \geq dist(e^{i\pi s}, h(B))$ y $d_H(A,B) = |s-t|$, se concluye que

$$d_H(h(A), h(B)) \geq 2d_H(A,B).$$

Por otro lado, tenemos que
$d_H(h(A), h(B)) = dist(e^{i\pi p}, h(B))$ para algún $p \in A$ o $d_H(h(A), h(B)) =$

$dist(e^{i\pi q}, h(A))$ para algún $q \in B$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $d_H(h(A), h(B)) = dist(e^{i\pi q}, h(A))$ para algún $q \in B$. Entonces $d_H(h(A), h(B)) = |e^{i\pi q} - e^{i\pi u}|$ para algún $u \in A$.
Notemos que $q \notin \{-1, 1\}$. En particular tenemos que $dist(q, A) = |q - u|$.
Así,

$$\begin{aligned} d_H(h(A), h(B)) &= |e^{i\pi q} - e^{i\pi u}| \\ &= 2 \operatorname{sen} \tfrac{|q-u|}{2} \\ &\leq \pi|q - u|, \text{ por la desigualdad (3.4)} \\ &= \pi dist(q, A) \\ &\leq \pi d_H(A, B). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$2d_H(A, B) \leq d_H(h(A), h(B)) \leq \pi d_H(A, B).$$

Y con esto concluimos la Afirmación.

Ahora supongamos que existe un encaje bi-Lipschitz de $F_{n-1}(\mathbb{S})$ en $\mathbb{S}^{m-1}$. Usando la función h, podemos ver que exite un encaje bi-Lipschitz de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{S}^{m-1}$, llamemosle a este encaje f.
Ahora, definamos la función $g : \Pi \to \mathbb{R}^m$, por

$$\begin{aligned} g(A) = |A| f\left(\frac{1}{|A|} A\right), &\text{ si } A \neq O \text{ y} \\ g(O) = (0, 0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Notemos que si $A \in \mathcal{S}$, $g(A) = f(A)$, pues dado $A \in \mathcal{S}$, tenemos que $|A| = 1$, y así

$$g(A) = |A| f\left(\frac{1}{|A|} A\right) = (1) f\left(\frac{1}{1} A\right) = f(A).$$

Ahora, supongamos que f es L-bi-Lipschitz, es decir, que

$$\frac{1}{L} d_H(A, B) \leq \|f(A) - f(B)\| \leq L d_H(A, B) \text{ para todo } A, B \in \mathcal{S}.$$

Afirmación 5.0.25. *g es $(2L + 1)$-bi-Lipschitz.*

Para la pueba de esta afirmación, primero notemos que para cualesquiera $X, Y \in \Pi$.

$$\begin{aligned} g(\mu X) &= |\mu X| f\left(\frac{1}{|\mu X|}\mu X\right) \\ &= \mu |X| f\left(\frac{1}{\mu |X|}\mu X\right) \\ &= \mu |X| f\left(\frac{1}{|X|} X\right) \\ &= \mu g(X). \end{aligned}$$

Así,

$$\|g(\mu X) - g(\mu Y)\| = \mu \|g(X) - g(Y)\|. \tag{5.1}$$

Además

$$\|g(\mu X) - g(X)\| = d_H(\mu X, X), \tag{5.2}$$

pues como $f : \mathcal{S} \to \mathbb{S}^{m-1}$, entonces $\|f\left(\frac{1}{|X|}X\right)\| = 1$. Así

$$\begin{aligned} \|g(\mu X) - g(X)\| &= \|\mu g(X) - g(X)\| \\ &= |\mu - 1| \|g(X)\| \\ &= |\mu - 1| \| |X| f\left(\tfrac{1}{|X|}X\right) \| \\ &= |\mu - 1| |X| \|f\left(\tfrac{1}{|X|}X\right) \| \\ &= |\mu - 1| |X| \\ &= d_H(\mu X, X). \end{aligned}$$

Sean $A, B \in \Pi$, puntos arbitrarios. Sin pérdida de generalidad supogamos que $|B| \leq | A|$ y sea $C = \dfrac{|B|}{|A|}A$. Entonces $A, C \in \Delta(A)$ y $B, C \in \mathcal{S}_{|B|}$. (El conjunto $\mathcal{S}_\mu$ donde $\mu > 0$, se definió al final del Capítulo 1).
En particular, por la igualdad (5.2) tenemos que

$$\|g(A) - g(C)\| = d_H(A, C). \tag{5.3}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \|g(B) - g(C)\| &= \| |B| f\left(\frac{1}{|B|}B\right) - |C| f\left(\frac{1}{|C|}C\right) \| \\ &= \| |B| f\left(\frac{1}{|B|}B\right) - |B| f\left(\frac{1}{|C|}C\right) \|, \text{ ya que } |B| = |C| \\ &\qquad \text{dado que } B, C \in \mathcal{S}_{|B|} \\ &= |B| \|f(\tilde{B}) - f(\tilde{C})\|, \text{ con } \tilde{B} = \frac{1}{|B|}B \text{ y } \tilde{C} = \frac{1}{|C|}C. \end{aligned}$$

Luego, dado que f es L-bi-Lipschitz, tenemos que

$$|B|\frac{1}{L}d_H(\tilde{B},\tilde{C}) \leq |B|\|f(\tilde{B})-f(\tilde{C})\| \leq |B|Ld_H(\tilde{B},\tilde{C}),$$

$$|B|\frac{1}{L}d_H\left(\frac{1}{|B|}B,\frac{1}{|C|}C\right) \leq |B|\|f(\tilde{B})-f(\tilde{C})\| \leq |B|Ld_H\left(\frac{1}{|B|}B,\frac{1}{|C|}C\right),$$

$$|B|\frac{1}{L}d_H\left(\frac{1}{|B|}B,\frac{1}{|B|}C\right) \leq |B|\|f(\tilde{B})-f(\tilde{C})\| \leq |B|Ld_H\left(\frac{1}{|B|}B,\frac{1}{|B|}C\right).$$

Luego por la igualdad (5.1) tenemos que

$$|B|\frac{1}{L}\frac{1}{|B|}d_H(B,C) \leq |B|\|f(\tilde{B})-f(\tilde{C})\| \leq |B|L\frac{1}{|B|}d_H(B,C).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{L}d_H(B,C) \leq \|g(B)-g(C)\| \leq Ld_H(B,C).$$

Así,

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &\leq d_H(A,C)+d_H(C,B) \\ &\leq \|g(A)-g(C)\|+L\|g(B)-g(C)\| \\ &\leq (L+1)\|g(A)-g(B)\|. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{1}{2L+1}d_H(A,B) \leq \|g(A)-g(B)\|.$$

Por otro lado

$$\|g(A)-g(B)\| \leq \|g(A)-g(C)\|+\|g(B)-g(C)\|.$$

Como $\|g(B)-g(C)\| \leq Ld_H(B,C)$

$$\|g(A)-g(B)\| \leq \|g(A)-g(C)\|+Ld_H(B,C).$$

Dado que $\|g(A) - g(C)\| = d_H(A, C)$ por (5.3)

$$\|g(A) - g(B)\| \leq d_H(A, C) + L d_H(B, C).$$

Por Lema 2.1.10 tenemos que $d_H(B, C) \leq 2 d_H(A, B)$, así

$$\|g(A) - g(B)\| \leq d_H(A, C) + 2L d_H(A, B).$$

Por Lema 2.1.9 $d_H(A, C) \leq d_H(A, B)$, así

$$\|g(A) - g(B)\| \leq d_H(A, B) + 2L d_H(A, B) = (2L + 1) d_H(A, B).$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2L+1} d_H(A, B) \leq \|g(A) - g(B)\| \leq (2L + 1) d_H(A, B).$$

Es decir, g es $(2L + 1)$-bi-Lipschitz. Con lo cual terminamos la prueba de la afirmación y la segunda parte.

Ahora damos inicio a la tercera y la última parte, para esto definamos $F : F_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{m+1}$, por

$$F((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = (g((x_1 - t, x_2 - t, \ldots, x_n - t)), t), \text{ donde } t = \tfrac{x_1 + x_2}{2}.$$

Notemos que para $X \in \Pi$, $t = 0$, se tiene que $F(X) = (g(X), 0)$.

Afirmación 5.0.26. *F es bi-Lipschitz.*

Para la prueba de esta afirmación notemos que para todo
$Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in F_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(\lambda + Z) &= F((\lambda + z_1, \lambda + z_2, \ldots, \lambda + z_n)) \\
&= (g((\lambda + z_1 - e_1, \lambda + z_2 - e_1, \ldots, \lambda + z_n - e_1)), q) \text{ con} \\
&\quad e_1 = \tfrac{\lambda + z_1 + \lambda + z_2}{2} \\
&= (g((\lambda + z_1 - \lambda - e_2, \lambda + z_2 - \lambda - e_2, \ldots, \lambda + z_n - \lambda - e_2)), \\
&\quad \lambda + e_2) \text{ con } e_2 = \tfrac{z_1 + z_2}{2} \\
&= (g((z_1 - e_3, z_2 - e_3, \ldots, z_n - t)), e_3) + (0, \ldots, 0, \lambda) \\
&\quad \text{con } e_3 = \tfrac{z_1 + z_n}{2} \\
&= F(Z) + (0, \ldots, 0, \lambda).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\|F(\lambda+A)-F(\lambda+B)\| &= \|(0,\ldots,0,\lambda)+F(A)-(0,\ldots,0,\lambda)-F(B)\|\\ &= \|F(A)-F(B)\|,\end{aligned}$$

y como $d_H(\lambda+A,\lambda+B)=d_H(A,B)$, podemos suponer que $B\in\Pi$.
Sea $C\in\Gamma(A)\cap\Pi$. Entonces tenemos que $A,C\in\Gamma(A)$ y $B,C\in\Pi$.
Notemos que $\|F(A)-F(B)\|^2=\|F(A)-F(C)\|^2+\|F(C)-F(B)\|^2$.
Por un lado tenemos que,

$$\begin{aligned}\|F(A)-F(C)\| &= \|F(A)-F(A+\lambda)\|, \text{ para algún } \lambda\in\mathbb{R}\\ &= \|F(A)-(0,\ldots,0,\lambda)-F(A)\|\\ &= \|(0,\ldots,0,\lambda)\|\\ &= |\lambda|.\end{aligned}$$

Por otro lado, el Lema 2.1.1 implica que $d_H(A,C)=dist(A,A+\lambda)=|\lambda|$
Así

$$\|F(A)-F(C)\|=d_H(A,C). \tag{5.4}$$

Luego, como $B,C\in\Pi$, tenemos que $F(B)=(g(B),0)$ y $F(C)=(g(C),0)$, entonces

$$\|F(B)-F(C)\|=\|g(B)-g(C)\|.$$

Como g es $(2L+1)$-bi-Lipschitz, tenemos que

$$\frac{1}{2L+1}d_H(B,C)\le\|F(B)-F(C)\|\le(2L+1)d_H(B,C). \tag{5.5}$$

Por el Lema 2.1.1 tenemos que

$$d_H(A,C)=|\lambda|\le d_H(A,B). \tag{5.6}$$

Por el Lema 2.1.7

$$d_H(B,C)\le 2d_H(A,C). \tag{5.7}$$

Con todo lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}d_H(A,B) &\le d_H(A,C)+d_H(C,B)\\ &\le \|F(A)-F(C)\|+d_H(C,B)\\ &\le \|F(A)-F(B)\|+(2L+1)\|F(C)-F(B)\|\\ &\le \|F(A)-F(B)\|+(2L+1)\|F(A)-F(B)\|\\ &= (2L+2)\|F(A)-F(B)\|.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{4L+3}d_H(A,B) \leq \frac{1}{2L+2}d_H(A,B) \leq \|F(A)-F(B)\|.$$

Mientras que por otro lado usando (5.4),(5.5),(5.6) y (5.7), tenemos que

$$\begin{aligned}\|F(A)-F(B)\| &\leq \|F(A)-F(C)\| + \|F(C)-F(B)\| \\ &\leq d_H(A,C) + (2L+1)d_H(B,C) \\ &\leq d_H(A,B) + (2L+1)2d_H(A,B) \\ &= (4L+3)d_H(A,B).\end{aligned}$$

Y por tanto tenemos que

$$\frac{1}{4L+3}d_H(A,B) \leq \|F(A)-F(B)\| \leq (4L+3)d_H(A,B).$$

Es decir, F es $(4L+3)$-bi-Lipschitz, con lo que ya probamos que existe un encaje bi-Lipschitz de $F_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{m+1}$. †

Corolario 5.0.27. *Si hay un encaje bi-Lipschitz de Π en $\mathbb{R}^m$ para alguna m, entonces hay un encaje bi-Lipschitz de $F_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{m+1}$.*

Desmostración:
Sea g el encaje que exite de Π en $\mathbb{R}^m$. Definiendo $F : F_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{m+1}$ como en la demostración del Teorema 5.0.23 tenemos el encaje bi-Lipschitz deseado.
†

Notemos que si la función f en la demostración del Teorema 5.0.23 es un homeomorfismo, entonces también lo son g y F. Y así si existe un encaje topológico de $F_{n-1}(\mathbb{S})$ en $\mathbb{S}^{m-1}$, entonces también existe un encaje topológico de $F_n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{m+1}$. Y como $F_3(\mathbb{S})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^3$ en $\mathbb{R}^4$ ([6]), concluimos que hay un encaje topológico de $F_4(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^5$.
En particular, el espacio $F_4(I)$, donde $I = [0,1]$, puede ser topológicamente encajado en $\mathbb{R}^5$, dando una respuesta positiva a la pregunta que hicierón Borsuk y Ulam en [4] (Pregunta 1, página II de este trabajo).

Que $F_4(\mathbb{I})$ pueda ser encajado topológicamente en $\mathbb{R}^5$ se sigue también de los trabajos de R. M. Schori [9] y R. N. Andersen, M. M. Marjanovic y de R. M. Schori [1]. Para ser más especificos veámoslo con las siguientes observaciones, que hizo Alejandro Illanes. El espacio $F_4(\mathbb{I})$ es homeomorfo al $cono(\mathbb{I}_0^1) \times \mathbb{I}$ donde $\mathbb{I}_0^1 = \{A \in F_4(\mathbb{I}) : 0, 1 \in A\}$ (Teorema 6 y Teorema 4 en [9]). Luego en [1] se mostro que $\mathbb{I}_0^1$ es el "Sombrero de Burro". Y este último puede ser construido en $\mathbb{R}^3$, así tenemos que el $cono(\mathbb{I}_0^1)$ puede ser encajado en $\mathbb{R}^4$. Por lo tanto $cono(\mathbb{I}_0^1) \times \mathbb{I}$ y por consiguiente $F_4(\mathbb{I})$ puede ser encajado en $\mathbb{R}^5$.

Bibliografía

[1] R. N. Andersen, M. M. Marjanovic and R. M. Schori, *Symmetric products and higher dimensional dunce hats*, Topology Proc. 18 (1993), 7 - 17.

[2] M. Borovikova and Ibragimov, *The Third Product of* $\mathbb{R}$, Comput. Methods Funct. Theory, Vol. 9 (2009), no. 1, 255-268.

[3] M. Borovikova, Z. Ibragimov and H. Yousefi, *Symmetric products of the Real Line*. J. Analysis., Vol. 18, (2010), 53-67.

[4] K. Borsuk and S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[5] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math 36 (1949), 235-244.

[6] R. Bott, *On the third symmetric potency of* S_1, Fund. Math., 39 (1952), 264-268.

[7] E. Castañeda, *Embedding symmetric products in euclidean spaces*, Continuum Theory, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 230., Marcel Dekker, New York, 2002, 67-79.

[8] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914. Primera edic., New York, 1949.

[9] R. M. Schori, *Hyperspaces and symmetric products of topological spaces*, Fund. Math. 63 (1968), 77 - 88.

[10] L. Vietoris, *Bereiche zweiter Ordnung*, Monats. Math. Phys. 32 (1922), no. 1, 258-280.